GEOMETRIA ANALITICA

Capítulo 9

La Circunferencia

9.1. Definición

Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del mismo plano.

Dicho punto fijo se llama centro, a la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro se acostumbra a llamar radio.

Ecuación

Sea $C(a, b)$ las coordenadas del centro, r el radio $r > 0$ y $P(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia.

Condición del L.G. de $P(x, y)$

$$CP = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (1)$$

A esta ecuación (1) se suele llamar ecuación canónica o standard de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r.

Notemos que de (1) desarrollando los cuadrados obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{2}$$

una ecuación de 2º grado en que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y además iguales a 1, carece del término en xy. Por tanto la ecuación en particular

$$x^2 + 3xy + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$$

no representa a una circunferencia.

Vamos estudiar en el párrafo siguiente en forma mas general una ecuación tal como (2).

9.2. Forma general centro y radio

Dada la ecuación general de 2º grado, por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3}$$

A, B, C, D, Ey F parámetros reales

De la observación anterior $B = 0,\ A = C \neq 0$, así

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

completando cuadrados obtenemos:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \tag{4}$$

De la definición de circunferencia real (9.1-) se deduce que el centro tiene las coordenadas

$$C\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \text{ y al radio } r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

esta última expresión para el radio nos impone que para (3) represente a una circunferencia real

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

9.3. Casos Notables

Un caso de gran importancia es el caso de una circunferencia con centro en el origen y radio r. De (1) se obtiene haciendo $a = b = 0$

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5}$$

Notemos también que en general una circunferencia tal como

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

necesita exáctamente de tres condiciones independientes para ser determinada.

Por comodidad en algunos casos conviene ocupar la ecuación

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0 \tag{6}$$

como representante de una circunferencia, note que se debe cumplir que $M^2 + N^2 - 4P > 0$ (condición del radio).

En este caso el centro esta dado por

$$C\left(-\frac{M}{2}, -\frac{N}{2}\right) \text{ y en radio por } \ r = \frac{\sqrt{M^2 + N^2 - 4P}}{2}$$

9.4. Familias

Las circunferencias que son tangentes a los ejes coordenados, notemos por ejemplo que forman una familia, es decir la tangencia implica que $a = b$ o $a = -b$, en el primer caso el centro se encuentra sobre la bisectriz del I y II cuadrantes $y = x$, así su ecuación estará dada por

$$(x \pm \lambda)^2 + (y \pm \lambda)^2 = \lambda^2, \ a = b = r = \pm\lambda \neq 0$$

λ parámetro real, para el 2^{o} caso el centro pertenece a $y = -x$, así su ecuación será:

$$(x \pm \lambda)^2 + (y \mp \lambda)^2 = \lambda^2$$

Otro caso importante, es el de la familia de circunferencias que pasan por los puntos de intersección de dos circunferencias dadas.

Dadas las circunferencias C_1 y C_2

$$C_1 : x^2 + y^2 + M_1x + N_1y + P_1 = 0, \quad M_1 + N_1 - 4P_1 > 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + M_2x + N_2y + P_2 = 0, \quad M_2 + N_2 - 4P_2 > 0$$

estamos en el supuesto que $C_1 \cap C_2 = \{P_1, P_2\} \Longleftrightarrow \triangle > 0$ "$\triangle$" es el discriminante de ecuación de 2º grado que se forma al efectuar la intersección de C_1 y C_2, así la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por P_1 y P_2 está dada por

$$x^2 + y^2 + M_1x + N_1y + P_1 + \lambda(x^2 + y^2 + M_2x + N_2y + P_2) = 0 \qquad (7)$$

λ parámetro real $\lambda \neq -1$.

Esta ecuación representa a todas las circunferencias por P_1 y P_2 con excepción, en este caso de C_2.

Si $\lambda = -1$ se obtiene la ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2, llamada eje radical, es decir

$$(M_1 - M_2)x + (N_1 - N_2)y + P_1 - P_2 = 0 \qquad (8)$$

Notemos también que todas las circunferencias de ésta familia tienen sus centros sobre la recta que une los centros $O_1\left(-\frac{M_1}{2}, -\frac{N_1}{2}\right)$ y $O_2\left(-\frac{M_2}{2}, -\frac{N_2}{2}\right)$, es decir

$$(N_2 - N_1)x - (M_2 - M_1)y - \frac{1}{2}(M_1N_2 - M_2N_1) = 0 \qquad (9)$$

ésta última ecuación se llama recta de centros.

9.5. Tangencia

Dada una circunferencia y una recta mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0 \\ \\ y = mx + n \end{array}\right\}$$

Sea $\triangle$ el discriminante de la curva de 2º grado de intersección de la circunferencia y la recta.

Se pueden dar los siguientes casos:

$\triangle = 0$ caso de tangencia de la circunferencia con la recta

$\triangle > 0$ caso de dos puntos de intersección

$\triangle < 0$ caso que indica que no hay intersección entre ambas curvas.

En particular vamos a estudiar la intersección de la circunferencia; $x^2 + y^2 = r^2$ y de la recta; $y - y_0 = m(x - x_0)$ con la condición $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ es decir que el punto $P_0(x_0, y_0)$ pertenece a la circunferencia.

Con lo que, se trata de determinar la forma de la ecuación que es tangente a la circunferencia en un punto $P_0(x_o, y_0)$ de ella.

Podemos seguir dos caminos para tal efecto, imponemos la condición $\triangle = 0$ o bien de la figura obtenemos que $m_n = \dfrac{y_0}{x_0}$ (n se llama normal) de aquí $m_t = -\dfrac{x_0}{y_0}$ luego la ecuación de la tangente resulta ser

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \Longleftrightarrow x_0 x + y_0 y = r^2 \tag{10}$$

Si es el caso de la circunferencia

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

en forma análoga o mediante una traslación paralela de los ejes, la ecuación de la tangente en $P_0(x_0, y_0)$ punto de tangencia, esta dada por

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2 \tag{11}$$

También podemos obtener las ecuaciones de las tangentes a una circunferencia en cierta dirección.

Sea $x^2 + y^2 = r^2$ la circunferencia dada, haciendo la intersección con $y = mx + n$ con m pendiente conocida e imponiendo la condición $\triangle = 0$, se tiene:

$$\triangle = (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2) = 0$$

$$\Longrightarrow n = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

así la ecuación de estas tangentes en cierta dirección "m" son:

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2} \tag{12}$$

9.6. Ejercicios Resueltos

1. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,-1), B(0,2)$ y $C(-3,0)$.

   Solución.

   Note que $m_{BC}\cdot m_{AB}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{-2}=-1$ el triángulo es rectángulo luego el centro se encuentra en el punto medio de la hipotenusa AC del triángulo, que es $M\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ su radio es:

   $$r^2=\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

   luego la ecuación pedida resulta ser: $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$

2. Análogo al problema anterior pero los puntos son $A(2,3), B(0,-1)$ y $C(-2,1)$.

   Solución.

   Hay a lo menos 3 formas diferentes de resolver el ejercicio , daremos una, ud. intente otras.

   Sea $x^2+y^2+Mx+Ny+P=0$ la ecuación de la circunferencia buscada, los tres puntos deben satisfacer la ecuación, así se deben tener:

   $$\left.\begin{array}{rcr} 4+9+2M+3N+P=0 & \Longrightarrow & 2M+3N+P=-13 \\ 1-N+P=0 & \Longrightarrow & -N+P=-1 \\ 4+1-2M+N+P=0 & \Longrightarrow & -2M+N+P=-5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} M=-\dfrac{2}{3} \\ N=-\dfrac{8}{3} \\ P=-\dfrac{11}{3} \end{array}$$

   así: $x^2+y^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}y-\dfrac{11}{3}=0$ cuyo centro es $C\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ y su radio $r=\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$

3. Determine la ecuación de una circunferencia que tiene su centro sobre la recta $x + y = 2$ y que pasa por los puntos $A(-3, 0)$ y $B(2, -1)$.

   Solución.

   Sea $C(a, b)$ las coordenadas del centro de la circunferencia, entonces se debe tener:

$$\left.\begin{array}{c}(a+3)^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+1)^2 \\ \\ a + b = 2\end{array}\right\}$$

   resolviendo este sistema obtenemos $a = 0$ y $b = 2$ el radio resulta $r = \sqrt{13}$, así la ecuación de la circunferencia pedida es $x^2 + (y-2)^2 = 13$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados y pasa por el punto $(2, 1)$.

   Solución.

   Sea $C(a, b)$ las coordenadas del centro de la circunferencia. Por ser tangente a los ejes coordenados: $a = b = r$ así $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ como debe pasar por $(2, 1)$, entonces $(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$ de donde resultan $a = 1$ o $a = 5$, luego

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1; \; (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

5. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta en el punto de intersección de las rectas $x - y = 1, \; 2x + 3y = 22$ y que sea tangente a la recta $l_1 : 3x + 4y = 16$. Encuentre también una recta l_2 paralela a l_1 y que sea tangente a la circunferencia mencionada.

   Solución.

   En centro de la circunferencia pedida es la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r}x - y = 1 \\ \\ 2x + 3y = 22\end{array}\right\} \Longrightarrow C(5, 4)$$

y el radio es la distancia desde el centro hasta la recta $3x + 4y = 16$

$$r = \frac{|3(5) + 4(4) - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

luego la ecuación resulta $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$

sean $P_0(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ puntos diametralmente opuestos pertenecientes a las tangentes l_1 y l_2 , la ecuación de la recta por el centro de la circunferencia es $-4x + 3y + 8 = 0$, las coordenadas de P_0 se determinan resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 16 = 0 \\ \\ -4x + 3y + 8 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_0\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

y como C es punto medio de QP_0, las coordenadas de Q se obtienen mediante

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x_1 + \frac{16}{5}}{2} = 5 \Longrightarrow x_1 = \dfrac{34}{5} \\ \\ \dfrac{y_1 + \frac{8}{5}}{2} = 4 \Longrightarrow y_1 = \dfrac{32}{5} \end{array}\right\} \Longrightarrow y - \frac{32}{5} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{34}{5}\right)$$

que es la ecuación de la tangente l_2.

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(11, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

Solución.

La ecuación de la tangente pedida es

$$y - 4 = m(x - 11)$$

haciendo la intersección con la circunferencia

$$x^2 + [m(x - 11) + 4]^2 - 8x - 6[m(x - 11) + 4] = 0$$

e imponiendo la condición de tangencia

$$\triangle = 0 \Longrightarrow (-22m^2 + 2m - 8)^2 - 4(1 + m^2)(121m^2 - 22m - 8) = 0$$

$$\Longrightarrow 12m^2 - 7m - 12 = 0 \Longrightarrow m = \frac{4}{3} \text{ o } m = -\frac{3}{4}$$

así resultan $4x - 3y - 32 = 0$ y $3x + 4y - 49 = 0$

7. Determine el valor de k de modo que la recta $2x + 3y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.

   Solución.

   (1^o forma) Tal como en el ejercicio anterior imponiendo $\triangle = 0$ resulta $k = -1$ o $k = 25$.

   (2^o forma) La tangente a la circunferencia $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$ en un punto (x_0, y_0) debe ser

   $$(x_0 + 3)(x + 3) + (y_0 + 2)(y + 2) = 13$$

   $$\Longleftrightarrow (x_0 + 3)x + (y_0 + 2)y + 3x_0 + 2y_0 = 0$$

   ésta ecuación debe ser la misma que $2x + 3y + k = 0$ luego se debe cumplir que

   $$\frac{x_0 + 3}{2} = \frac{y_0 + 2}{3} = \frac{3x_0 + 2y_0}{k} \qquad (*)$$

   de aquí $y_0 = \frac{1}{2}(3x_0 + 5)$, como $P_0(x_0, y_0)$ pertenece a la circunferencia, entonces

   $$x_0^2 + \frac{1}{4}(3x_0 + 5)^2 + 6x_0 + 2(3x_0 + 5) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = -5 \wedge y_0 = -5 \\ \\ x_0 = -1 \wedge y_0 = 1 \end{cases}$$

   finalmente en (*) $-1 = \frac{-25}{k} \Longrightarrow k = 25$ o bien $1 = \frac{-1}{k} \Longrightarrow k = -1$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0), B(2, \frac{9}{4})$ y $C(5, 0)$.

Solución.

El centro $O(x, y)$ de la circunferencia inscrita al triángulo se encuentra en el punto de intersección de las bisectrices

$$b_B : x = 2$$

$$b_C : d_1 = d_2,\ d_1 > 0 \text{ y } d_2 < 0$$

$$y = -\frac{9x + 12y - 45}{\sqrt{225}} \Longrightarrow$$

$$15y = -18 - 12y + 45 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow 0(2, 1)$$

notemos que $r = d_1 = 1$; así la ecuación de la circunferencia es $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre el eje X y que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(4, 6)$.

Solución.

(forma 1) Ecuación de la cuerda AB es $y - 3 = x - 1$

M punto medio de AB, $M\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ así la ecuación de OM es

$$y - \frac{9}{2} = -1\left(x - \frac{5}{2}\right) \Longleftrightarrow x + y - 7 = 0$$

Coordenadas del centro O, $y = 0 \Longrightarrow x = 7 \Longrightarrow O(7, 0)$ así: $(x - 7)^2 + y^2 = (6)^2 + (-3)^2 = 45$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia, cuyo centro esta sobre la recta $l_1 : 6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $l_2 : 8x + 15y + 7 = 0$ y $l_3 : 3x - 4y - 18 = 0$.

Solución.

Determinamos los centros Oy O' de las circunferencias que cumplen las condiciones pedidas. b_1 y b_2 bisectrices O intersección de l_1 y b_1

$$d_1 > 0 \text{ y } d_2 < 0, \; d_1 = -d_2$$

$$\frac{8x + 15y + 7}{-17} = -\frac{3x - 4y - 18}{5} \Longrightarrow$$

$$11x - 143y - 341 = 0$$

resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - 13y - 31 = 0 \\ \\ 6x + 7y - 16 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow O(5, -2) \Longrightarrow r = \frac{|3(5) - 4(-2) - 18|}{5} = 1$$

así: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$ es una de las circunferencias, análogamente $d_3 < 0 \wedge d_4 < 0, \; d_3 = d_4 \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 91x + 7y - 271 = 0 \\ \\ 6x + 7y - 16 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow O'\left(3, -\frac{2}{7}\right) \Longrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{121}{48}$$

que es la ecuación de la otra circunferencia en cuestión.

11. Determine la ecuación de la circunferencia de radio 1 tangente a la recta $l : 3x - 4y + 1 = 0$ en el punto de ordenada $y = 1$.

Solución.

Gráficamente notamos dos soluciones posibles.

El punto de tangencia pertenece a la recta tangente, así

$$y = 1 \Longrightarrow 3x - 4 + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

así $P_0(1, 1)$

$m_{l'} = -\dfrac{4}{3}$ por ser perpendicular a l luego la ecuación de l' es

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Longleftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$$

Sea la ecuación de la circunferencia pedida: $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ cuyo centro es $C(a,b)$, este se encuentra sobre l', así

$$4a+3b-7=0 \tag{1}$$

por otra parte $P_0(1,1)$ pertenece a la circunferencia, por tanto

$$(1-a)^2+(1-b)^2=1 \tag{2}$$

resolviendo el sistema formado por (1) y (2), obtenemos $C_1\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$ y $C_2\left(\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right)$, con lo que las ecuaciones de las circunferencias son:

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y-\frac{9}{5}\right)^2=1 \text{ y}$$

$$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=1$$

12. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias $C_1: x^2+y^2-4x+2y-8=0$ y $C_2: x^2+y^2-2x+2y-7=0$ y que tiene su centro en la recta $2x+y=5$.

Solución.

La ecuación de la circunferencia pedida pertenece a la familia

$$x^2+y^2-4x+2y-8+\lambda(x^2+y^2-2x+2y-7)=0$$

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-(4+2\lambda)x+(2+2\lambda)y-7\lambda-8=0$$

su centro esta dado por

$$C\left(\frac{2+\lambda}{1+\lambda},-1\right)$$

el cual debe satisfacer a la recta

$$2x+y=5 \Longrightarrow 2\left(\frac{2+\lambda}{1+\lambda}\right)-1=5 \Longrightarrow \frac{2+\lambda}{1+\lambda}=3 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

así la circunferencia tiene por ecuación

$$x^2+y^2-6x+2y-9=0$$

13. Una cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=25$ tiene por ecuación $x-7y+25=0$. Hallar la longitud de la cuerda y la simetral de ella.

Solución.

Resolviendo

$$x^2+y^2=25$$

$$x-7y+25=0$$

obtenemos las coordenadas de P_1 y P_2 punto de intersección de la cuerda con la circunferencia así $P_1(-4,3)$ y $P_2(3,4)$. La longitud de la cuerda es $\sqrt{50}$ y la ecuación de la simetral $y-\frac{7}{2}=-7\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

14. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y-47=0$ en el punto $(6,5)$. Hallar su ecuación.

Solución.

Sea la ecuación de la circunferencia dada $(x-2)^2+(y+1)^2=52$. La tangente a esta circunferencia en el punto $(6,5)$ es:

$$(6-2)(x-2)+(5+1)(y+1)=52$$

de donde $2x+3y-27=0$.

Sea $C(a,b)$ las coordenadas del centro de la circunferencia pedida que, debe satisfacer a la perpendicular a la recta tangente en el punto $(6,5)$ esto es

$$3a-2b=8, \qquad (1)$$

por otra parte

$$\sqrt{13}=\frac{2a+3b-27}{\sqrt{13}} \qquad (2),$$

(considerando distancia dirigia).

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2): $a=b=8$ así: $(x-8)^2+(y-8)^2=13$.

15. Determine la ecuación del L. G. de un punto $P(x, y)$ que se mueve en el plano XY de manera que la suma de: el cuadrado de su distancia al punto $(-1, 0)$ y el doble del cuadrado de su distancia al punto $(2, 3)$ es igual a 30.

    Solución.

    Condición del L.G. de $P(x, y)$ es

    $$(x+1)^2 + y^2 + 2[(x-2)^2 + (y-3)^2] = 30$$

    de aquí se deduce: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ ecuación de una circunferencia de $C(1, 2)$ y radio $r = \sqrt{6}$.

16. Determine la ecuación de una recta que pasa por el punto $A(0, 5)$ y que corta una cuerda de longitud 2 en la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

    Solución.

    Ecuación de la familia de rectas por el punto $A(0, 5)$

    $$y = kx + 5$$

    De la figura notemos que como el radio es 3, la distancia del centro a la cuerda es

    $$d = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$$

    Por otra parte, se debe tener

    $$\sqrt{8} = \frac{|k(1) - 1(0) + 5|}{\sqrt{k^2+1}} \Longrightarrow k = -1 \text{ o } k = \frac{17}{7},$$

    luego resultan 2 cuerdas con estas condiciones, que son

    $$y = -x + 5 \quad \text{e} \quad y = \frac{17}{7}x + 5$$

17. Dadas las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 39$. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de C_1 y C_2 y por el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.

    Solución.

La circunferencia pedida pertenece a la familia

$$x^2 + y^2 - 25 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x + 6y - 39) = 0 \qquad (1)$$

el centro $C(1, -3)$ de la circunferencia dada debe satisfacer a (1) luego de aqui se obtiene $\lambda = -\dfrac{15}{41}$ de donde remplazando en (1) se obtiene

$$26x^2 + 26y^2 + 30x - 40y - 440 = 0$$

18. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+6x-2y-6=0$ tal que forme un ángulo de $45°$ con el eje X.

Solución.

La familia de rectas que forman un ángulo de $45°$ con el eje x, son

$$y = x + k, \quad m = 1$$

Recordemos que las tangentes a $x^2 + y^2 = r^2$ de pendiente m, estan dadas por

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Como la circunferencia dada no esta centrada, hacemos una traslación paralela, es decir sea

$$x = x' - 3$$

$$y = y' + 1$$

nuevo origen el punto $(-3, 1)$, así en $(x+3)^2+(y-1)^2 = 16 \Longrightarrow x'^2+y'^2 = 16$ entonces las tangentes resultan

$$y' = x' \pm 4\sqrt{2} \qquad \text{de donde}$$

$$y - 1 = x + 3 \pm 4\sqrt{2} \qquad \text{así}$$

$$t_1 : x - y = 4(\sqrt{2} - 1) \quad \text{y} \quad t_2 : x - y = -4(\sqrt{2} + 1)$$

19. Si O es el origen y Q se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Encuentre la ecuación del L.G. de P, el punto de trisección de OQ más cercano al origen.

Solución.

Sean las coordenadas de $P(x,y)$ y de $Q(\alpha,\beta)$, así de:

$$\frac{OP}{PQ}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \quad \frac{x}{\alpha-x}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \alpha=3x$$

$$\frac{y}{\beta-y}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \beta=3y$$

seno como $Q(\alpha,\beta)$ satisface la ecuación de la circunferencia, se tiene

$$9x^2+9y^2-12x+3=0\Longrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

El L. G. de P es otra circunferencia de $C\left(\frac{2}{3},0\right)$ y $r=\frac{1}{3}$.

20. Hallar las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias

$$C_1: x^2+y^2+2x-4y-6=0; \qquad C_2: x^2+y^2-4x-2y=0$$

$$C_3: x^2+y^2+2x+12y-36=0$$

y también hallar las longitudes de las tangentes trazadas del centro radical a las tres circunferencias.

Solución.

Ecuaciones de los ejes radicales

$$C_1-C_2\Longrightarrow 3x-y-3=0 \tag{1}$$

$$C_2-C_3\Longrightarrow -3x-7y-18=0 \tag{2}$$

$$C_3-C_1\Longrightarrow 8y+21=0 \tag{3}$$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3) se obtiene las coordenadas del centro radical: $R\left(\frac{1}{8},-\frac{21}{8}\right)$

Por otra parte como $O_1(-1,2)$ y $r_1 = \sqrt{11} \Longrightarrow RT_1 = \sqrt{\dfrac{746}{64}}$ análogamente se obtienen RT_2 y RT_3 y note que $RT_1 = RT_2 = RT_3$ como debería ser.

21. Desde un punto fijo de una circunferencia se trazan cuerdas. Demostrar que el L.G. de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

Solución.

Sea $Q(a,b)$ el punto fijo sobre la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$R(\alpha,\beta)$ el punto variable también en la circunferencia.

Luego la condición del L.G. de $P(x,y)$ es: $x = \dfrac{\alpha + a}{2}$ e $y = \dfrac{\beta + b}{2}$ de donde $\alpha = 2x - a$ y $\beta = 2y - b$

$$\Longrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (2x-a)^2 + (2y-b)^2 \quad \text{pero} \quad \alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow (2x-a)^2 + (2y-b)^2 = r^2 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

ecuación de una circunferencia.

22. Dadas las circunferencias

$$C_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$$

$$C_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$$

Demuestre que si las circunferencias se cortan ortogonalmente entonces

$$a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - r_2^2 = 2(a_1a_2 + b_1b_2)$$

.

Demostración.

Si son ortogonales el radio de la primera debe ser tangente a la segunda y recíprocamente, entonces se debe tener

$$r_1^2 + r_2^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$

de donde se obtiene lo pedido.

23. Si P_0 es un punto fijo y L una recta variable por P_0 que corta a una circunferencia en P_1 y P_2, las tangentes desde P_1 y P_2 se intersecan en P. Demostrar que el L.G. de P es una recta.

Demostración.

Sea la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = r^2$ y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los puntos donde L interseca a la circunferencia, las tangentes en P_1 y P_2 son:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

$$x_2x + y_2y = r^2$$

El L.G. de $P(x, y)$ esta determinado por la intersección de estas dos rectas, así eliminando el parámetro r, se tiene $x_1x+y_1y = x_2x+y_2y$ esta ecuación representa a una recta que pasa por el origen.

24. Determine la ecuación del L.G. de los puntos $P(x, y)$ desde donde se trazan tangentes a la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = r^2$, si dichas tangentes forman un ángulo α entre si b) El L.G. de estos puntos si $\alpha = 90°$.

Solución.

Como

$$PP_1^2 = PP_2^2 \tag{1}$$

$PP_1^2 = x^2 + y^2 - r^2$ por otra parte

$PP_2^2 = r^2\, cotg^2 \dfrac{\alpha}{2}$ en (1) resulta

$$x^2 + y^2 = r^2(1 + cotg^2\frac{\alpha}{2})$$

$$x^2 + y^2 = r^2\, cosec^2\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{sen^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{2r^2}{1 - cos\alpha} \qquad \text{ahora si}$$

$$\alpha = 90^\circ \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2r^2$$

25. Dada la ecuación de una circunferencia por $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ y el punto $P_0(x_0, y_0)$ se traza por P_0 una familia de rectas (secantes variables). Determinar el L.G. de los puntos medios de las cuerdas determinadas por estos secantes.

Solución.

Familia de secantes variables por $P_0(x_0, y_0)$,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (1)$$

Familia de rectas variables por los puntos medios (pasan por el centro de la circunferencia)

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \qquad (2)$$

Eliminando el parámetro m, entre (1) y (2) obtenemos la ecuación del L.G. pedido así:

$$x^2 + y^2 - (a + x_0)x - (b - y_0)y + ax_0 + by_0 = 0$$

que es una circunferencia.

26. Un segmento $AB = l$, se mueve de manera que sus extremos se apoyan sobre dos rectas perpendiculares. Demuestre que el L.G. descrito por el punto medio del segmento, es una circunferencia.

Solución.

Sea un extremo del segmento el punto $A(\lambda, 0)$; λ variable entonces B tiene por coordenadas $B(0, \sqrt{l^2 - \lambda^2})$, por tanto el punto medio $P(x, y)$ debe cumplir que:

$$x = \frac{\lambda}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - \lambda^2}$$

de donde eliminando el parámetro λ, se obtiene: $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$ que es la ecuación de una circunferencia.

27. Hallar el L.G. de los puntos $P(x, y)$, desde los cuales se ve el segmento OA bajo un ángulo recto $O(0, 0)$ y $A(a, 0)$ $\quad a > 0$.

Solución.

Sea $l : y = \lambda x,\ \lambda \neq 0$ la familia de rectas por el origen y $y = -\dfrac{1}{\lambda}(x - a)$ la perpendicular a, l.

Eliminando el parámetro λ, se tiene la ecuación del L.G. que resulta ser $x^2 + y^2 - ax = 0$.

28. Un punto interior de un $\triangle$ isósceles, se mueve de manera que el cuadrado de su distancia a la base del triángulo es siempre igual al producto de sus distancias de los otros dos lados. Demostrar que el L.G. del punto P es una circunferencia.

Solución.

Sea el triángulo isósceles de vértices $A(-a, 0), B(a, 0)$ y $C(0, b)$ $a, b > 0$.

Condición del L.G. de $P(x, y)$

$$d_1^2 = d_2 \cdot d_3$$

Note que $d_1 > 0$, d_2 y $d_3 < 0$

$$d_1 = y, \quad d_2 = -\frac{(bx - ay + ab)}{-\sqrt{b^2 + a^2}}; \; d_3 = -\frac{(bx + ay - ab)}{+\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\text{así} \quad y^2 = -\frac{(bx - (ay - ab))(bx + (ay - ab))}{b^2 + a^2}$$

$$(a^2 + b^2)y^2 = -(b^2x^2 - (ay - ab)^2)$$

$$(a^2 + b^2)y^2 = -b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0 \quad \text{de aquí resulta}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{a^2}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 \quad \text{ec. de una circunferencia.}$$

9.7. Ejercicios Propuestos

1. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,1), B(4,0)$ y $C(2,5)$.

   Respuesta.

   $$\left(x - \frac{16}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{14}\right)^2 = \frac{1105}{196}$$

2. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3,0)$ y $B(2,-1)$ y tiene su centro sobre la recta $x + y = 2$.

   Respuesta.

   $(x + \lambda - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = (\lambda + 1)^2 + \lambda^2, \quad \lambda$ parámetro.

3. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,2), (3,4)$ y tiene su centro en la recta $2x + y - 1 = 0$.

Respuesta.

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 74$

4. Hallar la ecuación de una circunferencia tangente a los ejes coordenados y que tenga su centro en el punto $(2,1)$.

   Respuesta.

   No existe una circunferencia que cumpla a la vez con estas condiciones.

5. Demuestre que las tangentes trazadas desde el punto $(11,4)$ a la circunferencia $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ son perpendiculares entre si.

6. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje Y y que pasa por los puntos $(4,1)$ y $(-3,2)$.

   Respuesta.

   $x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos vértices son $A(0,-2), B(0,4)$ y $C(3,1)$.

   Respuesta.

   $(x - 3(\sqrt{2}-1))^2 + (y-1)^2 = 9(\sqrt{2}-1)^2$

8. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias

$$C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 6x = 0$$

   y que:

a) Pasa por el punto $(2, 6)$

b) Tiene su centro sobre el eje Y

c) Tiene su centro sobre la recta $2y = x - 4$

d) Es tangente a la recta $y = x$

Respuesta.

a) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 7y = 28$

b) $x^2 + y^2 - 6y - 24 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 20x + 2y + 8 = 0$

d) $8x^2 + 8y^2 - 57x + 9y + 36 = 0$

9. Desde un punto de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyas vértices son $A(-3, -1), B(0, 2)$ y $C(3, 1)$, que no sea uno de los vértices, se bajan perpendiculares a sus lados o prolongaciones.

   Demostrar que los pies de estas perpendiculares son colineales.

10. Dadas las rectas $l_1 : x-y+9 = 0$ y $l_2 : x+2y-24 = 0$. Encuentre una recta que pasa por la intersección de l_1 y l_2, y que determine en la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ una cuerda de longitud $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

    Respuesta.

    $y - 11 = \pm\sqrt{207}(x - 2)$

11. El punto $(3, -1)$ es el centro de una circunferencia. La recta $2x - 5y + 18 = 0$ intercepta con dicha circunferencia una cuerda de longitud 6. Hallar la ecuación de la circunferencia.

    Respuesta.

    $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$

12. Demostrar analíticamente que el triángulo inscrito en una semicircunferencia cuya hipotenusa es el diámetro de ella, es rectángulo.

13. Demostrar que las circunferencias $x^2+y^2+2x-4y=0$ y $x^2+y^2+4x+2y=0$ se cortan ortogonalmente. (aplique condición del ejercicio resuelto 22.)

14. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $(-4,-1)$ y que es tangente a la recta $3x+2y-12=0$.

    Respuesta.

    $(x+4)^2+(y+1)^2=52$

15. Hallar el L.G. de los puntos $P(x,y)$ de un plano desde los cuales se vé bajo ángulo recto el segmento AB si $A(0,1)$ y $B(1,1)$.

    Respuesta.

    $x^2+y^2-x-2y+1=0$

16. Un punto P se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas $3x-y+4=0;\quad x+3y-7=0$ es siempre igual a 2. Determine la ecuación del L.G. de P.

    Respuesta.

    $x^2+y^2+x-5y+\dfrac{9}{2}=0$

17. Dado un triángulo de vértices $A(-1,0), B(2,\frac{9}{4}), C(5,0)$ se pide:

    a) Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

    b) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

Respuesta.

a) $(x-2)^2+(y+\frac{7}{8})^2=(\frac{25}{8})^2$

b) $(x-2)^2+(y-\frac{25}{16})^2=(\frac{25}{16})^2$

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje X y tiene su centro sobre la recta $x-2y+2=0$ y pasa por el punto $(7,3)$.

Respuesta.

$(x-13)^2+(y-\frac{15}{2})^2=(\frac{15}{2})^2; \quad (x-4)^2+(y-3)^2=9$

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento interceptado por la recta $2x+3y-6=0$ con los ejes coordenados.

Respuesta.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=13.$$

20. Una circunferencia es tangente a las rectas paralelas $5x-3y+1=0$ y $5x-3y-4=0$ y tiene su centro sobre la recta $3x-2y-4=0$. Determine su ecuación.

Respuesta.

$$(x+9)^2+\left(y+\frac{31}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2\sqrt{34}}\right)^2.$$

21. Sea la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=17$ y la recta $y=4x$. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia dada paralelas a la recta dada.

Respuesta.

$y=4x\pm 17$

22. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x + 5y + \frac{25}{4} = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $5x - 12y - 1 = 0$.

    Respuesta.

    $(x-2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = 9$

23. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y-39 = 0$ en el punto $(4, 5)$.

    Respuesta.

    $5x + 4y - 40 = 0$

24. Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto $(3, 2)$. Hallar su ecuación.

    Respuesta.

    $x^2 + (y-6)^2 = 25; \quad (x-6)^2 + (y+2)^2 = 25$

25. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto$(6, 1)$ y es tangente a cada una de las rectas $4x - 3y + 6 = 0, \quad 12x + 5y - 2 = 0$.

    Respuesta.

    $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0; \quad 4x^2 + 4y^2 - 384x + 37y + 2119 = 0$

26. Determine la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x+y-2 = 0$ y $x - y - 2 = 0$ cuyo centro está sobre la recta $x - 2y + 4 = 0$.

    Respuesta.

    $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{2}; \quad (x+4)^2 + y^2 = 18$

27. Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circuferencias $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$ y $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$.

    Respuesta.

    $7x - y - 16 = 0; \quad 2\sqrt{2}$

28. Por el punto $(-5, 4)$ se trazan tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-10x+7 = 0$. Hallar el ángulo agudo que forman estas tangentes.

    Respuesta.

    $46°24'$

29. Demostrar que las tangentes desde el origen a la circunferencia $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$ son perpendiculares entre si.

30. Probar que las circunferencias $(x-3)^2+(y-1)^2 = 8$ y $(x-2)^2+(y+2)^2 = 2$ se cortan ortogonalmente.

9.8. Ejercicios Propuestos de nivel avanzado

1. Demostrar que en un triángulo cualquiera los pies de las alturas, los pies de las medianas, y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro a los vértices, son concíclicos.

2. Desde un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita a un triángulo dado se trazan las perpendiculares a los lados de dicho triángulo. Probar que los pies de las perpendiculares son colineales.

3. Se trazan dos tangentes paralelas a una circunferencia, que cortan a una tercera tangente en los puntos A y B. Demostrar que las rectas que unen A y B con el centro de la circunferencia, son perpendiculares entre si.

4. Se tiene una circunferencia circunscrita a cualquier triángulo dado. Demostrar que el producto de las longitudes de dos lados cualquiera del triángulo es igual al producto de la longitud del diámetro por la longitud de la altura trazada al tercer lado.

5. Demostrar que la recta $y = m(x - a) + a\sqrt{1 + m^2}$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$ para todos los valores reales de m. $(m \in \mathbb{R})$