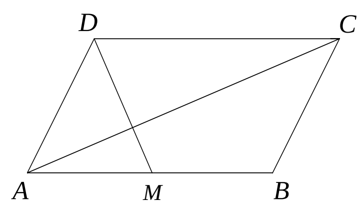
GEOMETRÍA VECTORIAL

Problema 1.

Demuestre que en todo paralelógramo, el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, triseca una diagonal y es trisectado por ella.



Solución.

$$M \text{ punto medio de } AB \Rightarrow \vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{a} \;\; (1)$$

Por ser un paralelógramo $\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ por (1)

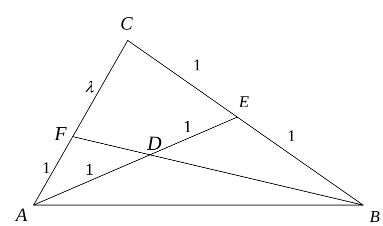
$\vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - 2\vec{m} + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{d} + 2\vec{m} = \vec{c} + 2\vec{a} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{d}+2\vec{m}}{3} = \dfrac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}$ de donde

se tiene que $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{MP}{PD} = \dfrac{1}{2}$, como se pretendía.

Problema 2.

Sea D el punto medio de la transversal de gravedad AE del triángulo ABC. La recta BD corta a AC en el punto F. Determine vectorialmente la razón en que F divide AC.

Solución.



Sea el origen el vertice A, $\{\vec{b}, \vec{c}\}$ base, luego se tiene:

$$\vec{d} = \frac{\vec{e}}{2} \;\text{ y }\; \vec{e} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \;\Rightarrow\; \vec{d} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{4}, \text{ también } \vec{f} = \frac{\vec{c}}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Como F, D y B son colineales, entonces:

$$\vec{f} = \alpha\,\vec{d} + (1-\alpha)\vec{b},\; \alpha \in \mathbb{R}$$

Así: $\vec{f} = \alpha\,\vec{d} + (1-\alpha)\vec{b} = \alpha\,\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{4} + (1-\alpha)\vec{b} = (1 - \dfrac{3}{4}\alpha)\,\vec{b} + \dfrac{1}{4}\alpha\vec{c} \qquad (2)$

Como $\{\vec{b},\vec{c}\}$ es una base de (1) y (2) se deduce que:

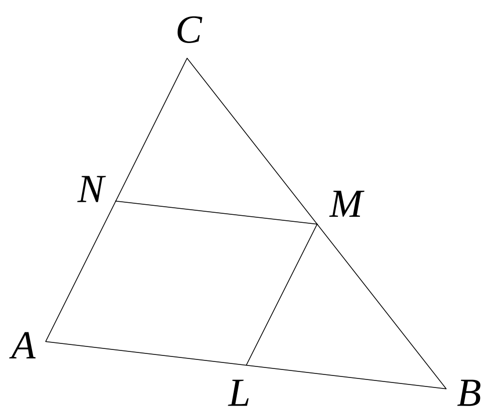
$$(1 - \tfrac{3}{4}\alpha = 0 \;\text{ y }\; \tfrac{1}{4}\alpha = \tfrac{1}{1+\lambda}) \Rightarrow \lambda = 2$$

Luego F divide a AC en la razón $1:2$.

Problema 3.

Si ABC es un triángulo cualquiera L, M, N los puntos medios de sus lados, AB, BC y CA respectivamente, demostrar que $ALMN$ es un paralelógramo.

Demostración.



Sea O un origen cualquiera, por demostrar que

$$\vec{AL} = \vec{NM} \;\text{ y }\; \vec{AN} = \vec{LM}$$

como L, M, N son los puntos medios de los lados AB, BC y CA entonces

$$\vec{l} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{n} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$

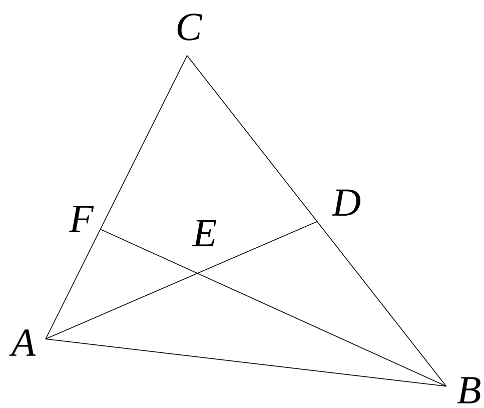
De inmediato

$$\vec{AL} = \vec{l} - \vec{a} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2} = \vec{NM}$$

analogamente para $\vec{AN} = \vec{LM}$.

Problema 4.

Se da en un triángulo ABC, la transversal de gravedad AD. Por B se traza una recta BEF que pasa por el punto medio E de AD (F sobre AC). Demostrar que: $3AF = AC$.



Demostración.

Se tiene que $\vec{d} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ y $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$ de donde obtenemos

$$2\vec{d} = \vec{b}+\vec{c} \text{ y } \vec{d} = 2\vec{e}-\vec{a} \text{ entonces } 2(2\vec{e}-\vec{a}) = \vec{b}+\vec{c}$$

de aquí $4\vec{e}-\vec{b} = 2\vec{a}+\vec{c} \Leftrightarrow \dfrac{4\vec{e}-\vec{b}}{3} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3} = \vec{f}$ esta igualdad implica que

$$2\vec{AF} = \vec{FC} \Leftrightarrow 2\vec{AF} + \vec{AF} = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AC} \Leftrightarrow 3\vec{AF} = \vec{AC}$$

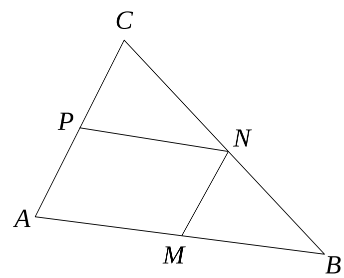
Compare esta forma de solución con la solución dada en el problema 2.

Problema 5.

Sea ABC un triángulo, M el punto medio de BC; N el punto medio de CA y P el punto medio de AB. Probar que $APMN$, es un paralelógramo.

Solución.

Por demostrar $\vec{AP} = \vec{MN} \quad \vee \quad \vec{AP} = \vec{MN}$



$$M \text{ punto medio de } AB \Leftrightarrow \vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

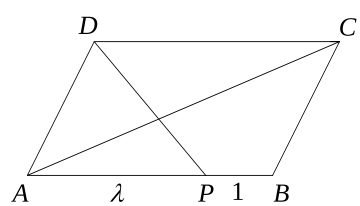
$$N \text{ punto medio de } BC \Leftrightarrow \vec{n} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$P \text{ punto medio de } CA \Leftrightarrow \vec{p} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$

$$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2} = \vec{n} - \vec{m} = \vec{MN}$$

Problema 6.

En el paralelógramo de la figura, si P divide al trazo AB en la razón λ, demuestre que la recta DP divide a la diagonal AC en la razón $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$



Solución.

P divide al trazo AB en la razón $\lambda \Leftrightarrow \vec{p} = \dfrac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda} \Leftrightarrow (1+\lambda)\vec{p} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$ $\quad (1)$

Como P es un paralelógramo entonces, $\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ $\quad (2)$

De (2), $\lambda\vec{d} - \lambda\vec{a} = \lambda\vec{c} - \lambda\vec{b}$ eliminamos $\lambda\vec{b}$ ocupando (1) resulta:

$(1+\lambda)\vec{p} + \lambda\vec{d} - \lambda\vec{a} = \vec{a} + \lambda\vec{c} \Leftrightarrow (1+\lambda)\vec{p} + \lambda\vec{d} = (1+\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{c}$ de aquí

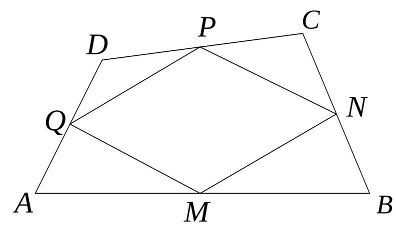
$\dfrac{(1+\lambda)\vec{p} + \lambda\vec{d}}{1+\lambda} = \dfrac{(1+\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{c}}{1+\lambda} \Rightarrow DP$ divide a la diagonal AC en la razón $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

Problema 7.

Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos de un cuadrilátero $ABCD$ determinan un paralelógramo cuyo centro es

$$\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

Demostración.



Por demostrar que: $\vec{MQ}=\vec{NP} \quad \wedge \quad \vec{QP}=\vec{MN}$

Hip.: $\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\ \vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ y $\vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})$

$\vec{MQ}=\vec{q}-\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{d}-\vec{b}) \quad (1)$

$\vec{NP}=\vec{p}-\vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{d}-\vec{b}) \quad (2)$

De (1) y (2) se tiene $\vec{MQ}=\vec{NP}$, analogamente para $\vec{QP}=\vec{MN}$

En un paralelógramo el centro se obtiene, en la intersección de sus diagonales que es el punto medio de MP y QN, así:

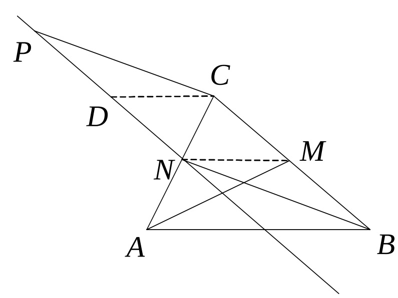
$$\vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{m})=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})]=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

o bien $\vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{q}+\vec{n})=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})]=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

Problema 8.

En un triángulo ABC, se trazan las transversales de gravedad AM y BN, por N una paralela a BC y por C una paralela a BN. Estas dos rectas se cortan en P y sea D el punto medio de PN. Demostrar que CD es paralela a MN.

Demostración.



Sea C el origen, $\{\vec{a},\vec{b}\}$ base; entonces $\vec{m}=\dfrac{\vec{b}}{2},\ \vec{n}=\dfrac{\vec{a}}{2}$

Por otra parte : $PN||BC$ y $PC||BN$ luego $BCPN$ es un paralelógramo, entonces $\vec{CP}+\vec{CB}=\vec{CN} \Leftrightarrow \vec{p}+\vec{b}=\vec{n} \Leftrightarrow \vec{p}=\dfrac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$

Ahora: $$\vec{CD}=\vec{d}=\frac{\vec{n}+\vec{p}}{2}=\frac{\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \qquad (1)$$

$$\vec{MN}=\vec{n}-\vec{m}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \qquad (2)$$

Finalmente por (1) y (2) $\vec{CD}=\vec{MN} \Rightarrow CD||MN$.

Problema 9.

Demuestre que si las rectas dadas por las ecuaciones $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{m}_1=\vec{0}$ y $(\vec{r}-\vec{b})\times\vec{m}_2=\vec{0}$ se intersecan entonces $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{m}_1\times\vec{m}_2)=0$

Solución.

Sea la ecuación de las rectas dadas por $l_1:\vec{r}=\vec{a}+t_1\vec{m}_1$ y $l_2:\vec{r}=\vec{b}+t_2\vec{m}_2$ si l_1 y l_2 se intersecan existen escalares t_1 y t_2 tales que:
$\vec{a}+t_1\vec{m}_1=\vec{b}+t_2\vec{m}_2$ tomando el producto punto por $\vec{m}_1\times\vec{m}_2$ resulta

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{m}_1\times\vec{m}_2)=0$$

Problema 10.

Determine la ecuación de la recta que pasa por $P_0=(2,0,-2)$ y corta a las rectas $l_1:\vec{r}=\vec{a}+t_1\vec{u}_1$ y $l_2:\vec{r}=\vec{b}+t_2\vec{u}_2$ donde:
$\vec{a}=(3,0,-1),\ \vec{b}=(0,-1,-2),\ \vec{u}_1=(2,1,2),$ y $\vec{u}_2=(3,-1,2)$

Solución.

Primero determinamos las ecuaciones de los planos formados por: P_0 con l_1 y P_0 con l_2,

$$\vec{n}_1=(\vec{a}-\vec{p}_0)\times\vec{u}_1=(1,0,1)\times(2,1,2)=(-1,0,1)$$

$$\vec{n}_2=(\vec{b}-\vec{p}_0)\times\vec{u}_2=(-2,-1,0)\times(3,-1,2)=(-2,4,5)$$

Así:

$$P_1:\ -x+y+d_1=0,\ d_1=-(2,0,-2)\cdot(-1,0,1)=4$$

$P_2: -2x+4y+5z+d_2=0,\ d_2=-(2,0,-2)\cdot(-2,4,5)=14$

La recta pedida es la intersección de P_1 y P_2 que resulta

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{3}=$$

Problema 11.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios y t el ángulo entre ellos, demuestre que

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=2\left|sen\frac{t}{2}\right|$$

Demostración.

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2=(a-b)\cdot(a-b)\ =a^2-2a\cdot b+b^2\ =2-2a\cdot b$$

$$=\quad 2(1-\|a\|\|b\|\ cost)\quad =2(1-cost)\ =4sen^2\tfrac{t}{2},\ \Rightarrow$$

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=2|sen\tfrac{t}{2}|$$

Problema 12.

Encuentre la ecuación del plano que pasa por (a,b,c) y es perpendicular al plano

$\pi_1\ : ax+by+cz=1$ y al plano $\pi_2:\ x+y+z=abc.$

Solución.

Note que la dirección del plano pedido es $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ asi:

$(x-a,y-b,z-c)\cdot(a,b,c,)\times(1,1,1)=0$ de donde resulta la ecuación

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

Problema 13.

Si $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son tres vectores coplanares, demostrar que $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ también lo son.

Demostración.

Si $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son tres vectores coplanares, entonces $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$ por demostrar que

$[\vec{a}\times\vec{b}\;\vec{b}\times\vec{c}\;\vec{c}\times\vec{a}]=0,$ en efecto :

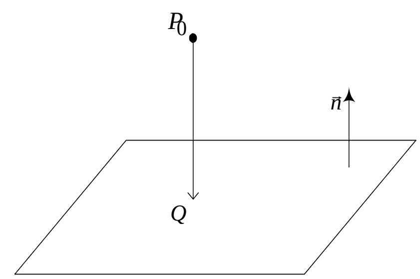
$(\vec{a}\times\vec{b})\times\,\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\;\{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\,\vec{b}-[\vec{a}\vec{b}\vec{b}]\,\vec{c}\}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=0$

Problema 14.

a) Dada la ecuación de un plano por $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$, demuestre que la distancia desde un punto P_0 al plano dado, está dada por $\dfrac{1}{||\vec{n}||}|\,d-\vec{p}_0\cdot\vec{n}\,|$, con $\vec{p}_0\cdot\vec{n}\neq d$. ¿Como se puede interpretar la condición $\vec{p}_0\cdot\vec{n}\neq d$?

b) Calcule la distancia desde el punto $P_0(2,3,-4)$ al plano $3x-4y+7z=21$

Solución.



De la figura se tiene

$$\vec{P_0Q}=t\,\vec{n}\;\Leftrightarrow\;\vec{q}-\vec{p}_0=t\,\vec{n}\;\;/\cdot\vec{n}\;\;\Rightarrow\vec{q}\cdot\vec{n}-\vec{p}_0\cdot\vec{n}=t\,\vec{n}\cdot\vec{n}\;\;\Leftrightarrow$$

$t=\dfrac{\vec{q}\cdot\vec{n}-\vec{p}_0\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}=\dfrac{d-\vec{p}_0\cdot\vec{n}}{||\vec{n}||^2}$, pués Q pertenece al plano$(\vec{q}\cdot\vec{n}=d)$

La distancia pedida es $||\vec{P_0Q}||=\;|\,\dfrac{d-\vec{p}_0\cdot\vec{n}}{||\vec{n}||^2}\,|\,||\vec{n}||=\;\dfrac{1}{||\vec{n}||}|\,d-\vec{p}_0\cdot\vec{n}\,|$

$\vec{p}_0\cdot\vec{n}\neq d\;\Rightarrow P_0$ no pertenece al plano $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$.

b) Aplicando la fórmula ya demostrada, se tiene

$$d=\frac{1}{\sqrt{74}}|21-(-34)|=\frac{55}{\sqrt{74}}$$

Problema 15.

a) Demostrar que $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a})=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$

b) Resolver $(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{x}\times\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}$

Solución.

a) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a})=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[(\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a})\,\vec{c}-(\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c})\,\vec{a}\,\right]$

$=(\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a})\,(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}),$ pués $\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c}=0$

$=(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c})\,(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c})=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$

b) $(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{x}\times\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}\ \ /\cdot\vec{a}\ \Rightarrow$

$(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ como $\vec{a}\cdot\vec{a}\neq 0\ \Rightarrow\ \vec{x}\cdot\vec{a}=0 \qquad (1)$

Por otra parte $(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{x}\times\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}\ \ /\times\vec{a}\ \Rightarrow$

$(\vec{x}\times\vec{a})\times\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\ \Leftrightarrow\quad (\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{x}=(\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}$

$\Rightarrow\vec{x}=\dfrac{1}{||\vec{a}||^2}(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}\neq\vec{0}$

Problema 16.

Cuatro planos tienen las siguientes ecuaciones:

$P_1:\ x+2y-2z=5;\ \ P_2: 3x-6y+3z=2;\ \ P_3:\ 2x+y+2z=-1$

$P_4:\ x-2y+z=7.$

a) Demuestre que dos de ellos son paralelos y los otros dos son perpendiculares.

b) Encuentre la distancia entre los dos planos paralelos.

Demostración.

a) P_2 y P_4, son paralelos pues $\vec{n}_2\times\vec{n}_4=\vec{0}$ y P_1 y P_3 son perpendiculares pues $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=0$

b) Tomamos la distancia desde cualquier punto del plano P_2 al plano P_4 es decir, desde el punto $A(0,-\frac{1}{3},0)$, luego

$$d=\frac{|1\cdot 0-2\cdot -\frac{1}{3}+1\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3\sqrt{6}}$$

Problema 17.

a) Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, demuestre que: $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=3\,\vec{a}\times\vec{b}$

b) Demuestre que: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

Demostración.

a) De $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\ \wedge\ \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}\\ \vec{a}\times\vec{b}&=\vec{b}\times\vec{c}\\ \vec{a}\times\vec{b}&=\vec{a}\times\vec{b}\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas tres expresiones resulta:

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=3\,\vec{a}\times\vec{b}$$

b) $$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})&=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\\ &=\vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}\,]\\ &=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})\end{aligned}$$

Problema 18.

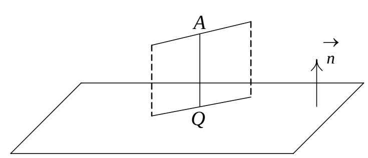
a) Demuestre que el ángulo que forman las proyecciones: $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ y $proy_{\vec{u}}\vec{v}$ es el mismo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Determinar la proyección de la recta $\vec{r}=(1,-2,1)+t(1,-1,1),\ t\in\mathbb{R}$ sobre el plano $4x+2y-2z-1=0$

Solución.

a) $$cos\,t=\frac{\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\cdot\dfrac{(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}}{||\vec{u}||^2}}{\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{||\vec{v}||\,||\vec{u}||}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||},$$ y esta expresión es igual al coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Nótese que la recta y el plano son paralelos pues $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$, entonces la dirección de la recta proyección sobre el plano, es la misma dirección de la recta dada.



La ecuación pedida es: $(\vec{r}-\vec{q})\times(1,-1,1)=\vec{0}, A=(1,-2,1)$

Solo resta determinar $\vec{q}$, para lo cual se tiene $\vec{AQ} = t\vec{n} \Leftrightarrow \vec{q} - \vec{a} = t\vec{n}$

$$\begin{aligned} x - 1 &= 4t \quad \Leftrightarrow x = 1 + 4t \\ y + 2 &= 2t \quad \Leftrightarrow y = -2 - 2t \\ z - 1 &= -2t \Leftrightarrow z = 1 + 2t \end{aligned}$$

Como Q pertenece al plano, entonces

$$4(1 + 4t) + 2(-2 - 2t) - 2(1 + 2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = \tfrac{3}{8}$$

luego: $Q(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}, \frac{7}{4})$

Finalmente la ecuación de la recta es: $\dfrac{x - \frac{5}{2}}{1} = \dfrac{y + \frac{11}{4}}{-1} = \dfrac{z - \frac{7}{4}}{1}$

Problema 19.

Demuestre que el punto de intersección de las rectas coplanares y no paralelas $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{a}_0$ y $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{b}_0$ está dado por

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}_0 \times \vec{b}_0}{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}} \quad \text{con } \vec{a}_0 \cdot \vec{b} \neq 0$$

Solución.

Efectuando $\vec{a}_0 \times$ por la ecuación $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{b}_0$ resulta

$$\vec{a}_0 \times (\vec{r} \times \vec{b}) = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0 \Leftrightarrow (\vec{a}_0 \cdot \vec{b})\vec{r} - (\vec{a}_0 \cdot \vec{r})\vec{b} = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0 \quad (1)$$

Por otra parte, haciendo $\cdot \vec{r}$ por la ecuación $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{a}_0$ resulta :

$(\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{r} = (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) \Leftrightarrow (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) = 0$, en (1) y se tiene

$$(\vec{a}_0 \cdot \vec{b})\vec{r} = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0 \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{\vec{a}_0 \times \vec{b}_0}{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}}$$

Problema 20.

Dados los vectores:

$$\vec{a} = (-4, 3, 0),\ \vec{b} = (2, -1, 3) \text{ y } \vec{c} = (-2, 2, 3)$$

a) Pruebe que los tres vectores son coplanares

b) Encuentre el ángulo entre los vectores : $proy_{\vec{a}}\vec{b}$ y $proy_{\vec{b}}\vec{a}$

Solución.

a) Basta probar que : $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -4 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(9,12,-2)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=(9,12,-2)\cdot(-2,2,3)=0$$

o bien directamente mediante

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ -2 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

b) Notemos que el ángulo que forman entre la $proy_{\vec{a}}\vec{b}$ y la $proy_{\vec{b}}\vec{a}$ es el mismo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, así $cos\,t=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||}=\dfrac{-11}{5\sqrt{14}}\Rightarrow t\approx 126°$

Problema 21.

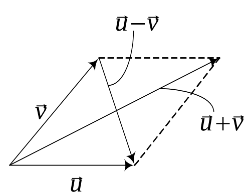
a) Demuestre que si : $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales entre si, entonces $||\vec{u}||=||\vec{v}||$, interprete geometricamente este resultado.

b) Pruebe que el vector $(\vec{u}-proy_{\vec{v}}\vec{u})$ es ortogonal al vector $\vec{v}$, $\forall\ \vec{u},\vec{v}$ con $\vec{v}\neq\vec{0}$

Demostración.

a) $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ ortogonales entre si, entonces: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$

$\vec{u}.\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow||\vec{u}||^2=||\vec{v}||^2\Leftrightarrow||\vec{u}||=||\vec{v}||$



$\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son las diagonales de un rombo

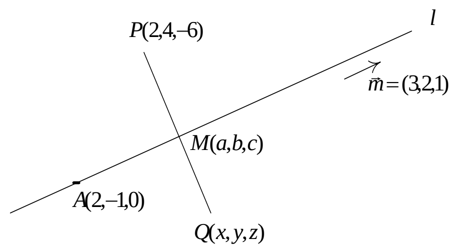
b) $(\vec{u}-proy_{\vec{v}}\vec{u})\cdot\ \vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}-proy_{\vec{v}}\vec{u}\ \cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}-\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Problema 22.

Determine un punto Q simétrico del punto $P(2,4,-6)$ con respecto a la recta

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$$

Solución.



Sea M punto medio del trazo PQ, M sobre recta l y $MP \perp l$; entonces

$$\vec{MP} \cdot \vec{m} = 0 \Leftrightarrow (2-a, 4-b, -6-c) \cdot (3,2,1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 8$$

$$M \in l \Rightarrow \frac{a-2}{3} = \frac{b+1}{2} = \frac{c}{1} \Rightarrow 2a - 3b = 7 \;\wedge\; b - 2c = -1;$$

de donde resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 8 \\ 2a - 3b \quad &= 7 \\ b - 2c &= -1 \end{aligned}$$

resultan: $a = \dfrac{20}{7}$; $b = -\dfrac{3}{7}$ y $c = \dfrac{2}{7}$

Así por ser M punto medio, entonces:

$$\frac{2+x}{2} = a \Rightarrow x = \frac{26}{7}$$

$$\frac{4+y}{2} = b \Rightarrow y = -\frac{34}{7}$$

$$\frac{-6+z}{2} = c \Rightarrow z = \frac{46}{7}$$

por tanto el punto simétrico de P es, $Q = (\frac{26}{7}, -\frac{34}{7}, \frac{46}{7})$

Problema 23.

Considerar el tetraedro regular de vértices: $O(0,0,0)$, $A(k,k,0)$, $B(k,0,k)$ y $C(0,k,k)$; $k > 0$.

a) Hallar la longitud de cada arista y el área de cada cara

b) Hallar el ángulo entre cada par de aristas.

c) Hallar la ecuación del plano formado por los vértices: A, B y C

Solución.

a) Todas las aristas son iguales, luego su longitud es

$||\vec{OA}|| = \sqrt{k^2 + k^2} = k\sqrt{2}$, como también todas las áreas son iguales como también todas las áreas que son $A = \dfrac{1}{2} k\sqrt{2}\,\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,k^2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,k^2$

b) Todos los ángulos entre cada par de aristas son iguales y se calculan mediante

$$cos\, t = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{||\vec{OA}||||\vec{OB}||} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 60°$$

c) $\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 0 & -k & k \\ -k & 0 & k \end{vmatrix} = \left(-k^2,\ -k^2,\ -k^2\right) = -k^2(1,1,1)$

Así la ecuación del plano es:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow [(x,y,z)-(k,k,0)]\cdot(1,1,1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z-2k = 0$$

Problema 24.

a) Calcular la distancia del punto $Q(3,2,1)$ al plano de ecuación $x - y + 2z = 4$

b) Calcular la distancia del punto $Q(1,5,-2)$ a la recta dada por $x = -2+4t,\ y = 3,\ z = 1-t.$ (Use proyección)

Solución.

a) De inmediato $d = \dfrac{|3-2+2\cdot 1-4|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

b) $d = ||\vec{q} - proy_{_R}\,\vec{q}||$, donde $proy_{_R}\,\vec{q} = \frac{1}{||\vec{u}||}(\vec{q}\cdot\vec{u})\,\widehat{u}$ con $\vec{u} = (4,0,-1)$ luego

$proy_{_R}\,\vec{q} = \dfrac{6}{17}(4,0,-1)$, por tanto $d = ||\dfrac{1}{17}(-7,5,-28)|| = \dfrac{1}{17}\sqrt{845}$

Problema 25.

Demuestre que si las rectas dadas por las ecuaciones $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{m}_{_1} = \vec{0}$ y $(\vec{r}-\vec{b})\times\vec{m}_2 = \vec{0}$ se intersecan entonces $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{m}_1\times\vec{m}_2) = 0$

Solución.

Sea la ecuación de las rectas dadas por $l_1 : \vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{m}_1$ y $l_2 : \vec{r} = \vec{b} + t_2\vec{m}_2$ si l_1 y l_2 se intersecan existen escalares t_1 y t_2 tales que:

$\vec{a} + t_1\vec{m}_1 = \vec{b} + t_2\vec{m}_2$ tomando el producto punto por $\vec{m}_1\times\vec{m}_2$ resulta

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{m}_1\times\vec{m}_2) = 0$$

Problema 26.

Determine la ecuación de la recta que pasa por $P_0 = (2, 0, -2)$ y corta a las rectas $l_1 : \vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{u}_1$ y $l_2 : \vec{r} = \vec{b} + t_2\vec{u}_2$ donde:
$\vec{a} = (3, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, -2)$, $\vec{u}_1 = (2, 1, 2)$, y $\vec{u}_2 = (3, -1, 2)$

Solución.

Primero determinamos las ecuaciones de los planos formados por: P_0 y l_1 y P_0 y l_2,
$\vec{n}_1 = (\vec{a} - \vec{p}_0) \times \vec{u}_1 = (1, 0, 1) \times (2, 1, 2) = (-1, 0, 1)$
$\vec{n}_2 = (\vec{b} - \vec{p}_0) \times \vec{u}_2 = (-2, -1, 0) \times (3, -1, 2) = (-2, 4, 5)$
Así:
$P_1 : -x + y + d_1 = 0,\ d_1 = -(2, 0, -2) \cdot (-1, 0, 1) = 4$
$P_2 : -2x + 4y + 5z + d_2 = 0,\ d_2 = -(2, 0, -2) \cdot (-2, 4, 5) = 14$

La recta pedida es la intersección de P_1 y P_2 que resulta

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-4}$$

Problema 27.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios y t el ángulo entre ellos, demuestre que

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 2\left|sen\frac{t}{2}\right|$$

Demostración.

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2} = \sqrt{2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$$
$$= \sqrt{2(1 - \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|cost)} = \sqrt{2(1 - cost)} = \sqrt{4sen^2\tfrac{t}{2}}$$
$$= 2\left|sen\frac{t}{2}\right|$$

Problema 28.

Encuentre la ecuación del plano que pasa por (a, b, c) y es perpendicular al plano $\pi_1 : ax + by + cz = 1$ y al plano $\pi_2 : x + y + z = abc$.

Solución.

Note que la dirección del plano pedido es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ asi:

$(x-a, y-b, z-c)\cdot(a,b,c,)\times(1,1,1)=0$ de donde resulta la ecuación

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

Problema 29.

En $\mathbb{R}^3$, dada la recta $l:$ $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{4}$

a) Determine k para que el plano π, que pasa por los puntos $A(2,3,k)$ y $B(1,2,3)$ sea perpendicular a la recta l. Encuentre la ecuación del plano π.

b) Encuentre las coordenadas del punto C de intersección, del plano π con la recta l.

Solución.

a) Se debe tener $n=m=(3,1,4)$ y por tanto $n\cdot AB=0 \Leftrightarrow$

$(3,1,4)\cdot(-1,-1,3-k)=0 \Leftrightarrow k=2$ con lo que la ecuación del plano π

resulta $3x+y+4z-(2,3,2)\cdot(3,1,4)=0 \Leftrightarrow 3x+y+4z-17=0$

b) Las ecuaciones paramétricas de l, son: $x=2+3t;\ y=1+t;\ z=4t$ deben satisfacer a la ecuación del plano π, es decir

$$3(2+3t)+1+t+4(4t)-17=0 \Rightarrow t=\frac{5}{13}$$

por tanto las coordenadas del punto son: $\left(\dfrac{41}{13},\dfrac{18}{13},\dfrac{20}{13}\right)$

Problema 30.