GEOMETRÍA VECTORIAL

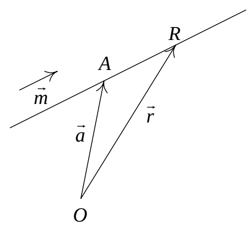
(Continuación)

Cap. 4

Rectas

Una recta está definida por un vector que indica su dirección y un punto cualquiera que pertenece a ella.

Sea $\vec{m}$ el vector que indica su dirección y A un punto de ella y cuyo vector de posición es $\vec{a}$, entonces de la figura se tiene:



Ecuación vectorial

$$\vec{AR}\,||\vec{m} \Leftrightarrow \vec{AR}\times\vec{m}=\vec{0} \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{a})\times\vec{m}=\vec{0} \qquad (1)$$

La ecuación (1) se conoce como la ecuación vectorial de una recta, que también se puede expresar por $\vec{r}\times\vec{m}=\vec{p}$.

Ecuación paramétrica

$$\vec{AR}\,||\vec{m} \Leftrightarrow \vec{AR}=t\,\vec{m} \Leftrightarrow \vec{r}-\vec{a}=t\,\vec{m} \Leftrightarrow \vec{r}=\vec{a}+t\,\vec{m} \qquad (2)$$

(2) se llama ecuación paramétrica de una recta pues depende del parámetro real t.

Ecuación cartesiana

Introduciendo en (2) los vectores: $\vec{m}=(m_1,m_2,m_3)$, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{r}=(x,y,z)$ se tiene, para m_1,m_2 y $m_3\neq 0$

$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3)+t\,(m_1,m_2,m_3)$

$(x-a_1,y-a_2,z-a_3)=t\,(m_1,m_2,m_3)$, de donde se obtienen

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-a_2}{m_2}=\frac{z-a_3}{m_3}=t,$$ también llamada forma simétrica.

ahora, si $m_1 \vee m_2 \vee m_3$ es 0 y suponiendo $m_1 = 0$ entonces la ecuación, queda

$$x = a_1,\ \frac{y - a_2}{m_2} = \frac{z - a_3}{m_3} = t$$

Si, $m_1 = m_2 = 0$ entonces,

$$x = a_1,\ y = a_2,\ \frac{z - a_3}{m_3} = t$$

Ejemplo 1.

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2,0)$ y $B(0,3-1)$

Solución.

La dirección de la recta esta dada por $\vec{m} = \vec{AB} = (-1,1,-1)$ así,

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \text{ o bien } \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

Ejemplo 2

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,-3)$ y que es paralela a la recta $\vec{r} = (4-t, 3t, 1)$, t parámetro real.

Solución.

De inmediato $\vec{r} = (4,0,1) + t(-1,3,0),\ t \in \mathbb{R};$ de aquí que $\vec{m} = (-1,3,0)$ entonces

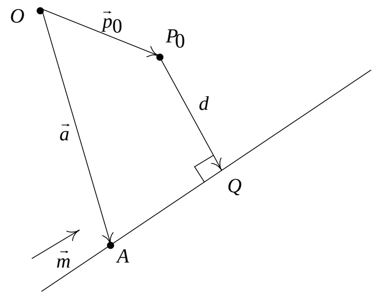
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} \ \wedge\ z = 1$$

es la ecuación de la recta en cuestión.

Distancia de un punto a una recta.

Dada la recta cuya ecuación es $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{m} = \vec{0}$, y sea $P_0(\vec{p}_0)$ un punto también dado, entonces

$$d = \| (\vec{p}_0 - \vec{a}) \times \widehat{m} \|$$



Demostración.

Vamos a dar una demostración diferente a la expuesta en el capítulo 3

$$d = \| \vec{P_0Q} \|$$

Por otra parte: $\vec{OP_0} + \vec{P_0Q} + \vec{QA} = \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{P_0Q} = \vec{a} - \vec{p}_0 - \vec{QA}$

haciendo $\times \vec{m}$, se tiene $\vec{P_0Q} \times \vec{m} = (\vec{a} - \vec{p}_0) \times \vec{m}$, pues $\vec{QA} \,||\, \vec{m}$

Tomando norma y aplicando la definición del producto cruz, resulta

$$\| \vec{P_0Q} \times \vec{m} \| = \| (\vec{a} - \vec{p}_0) \times \vec{m} \| \Leftrightarrow \| \vec{P_0Q} \| \| \vec{m} \| \, sen\, 90° = \| (\vec{a} - \vec{p}_0) \times \vec{m} \|$$

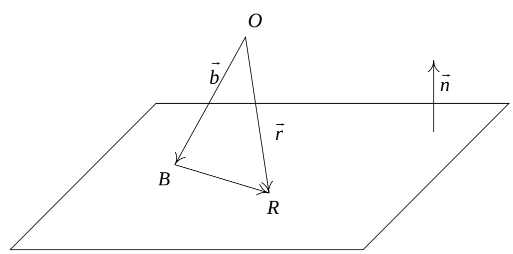
Finalmente dividiendo por la norma de $\vec{m}$, se tiene

$$d = \| \vec{P_0Q} \| = \| (\vec{p}_0 - \vec{a}) \times \widehat{m} \|$$

Planos

Un plano está definido por un vector normal a todos los vectores contenidos en el plano y un punto cualquiera que pertenece a dicho plano.

Sea $\vec{n}$ el vector normal y B un punto del plano y cuyo vector de posición es $\vec{b}$, entonces de la figura se tiene:



<u>Ecuación vectorial</u>

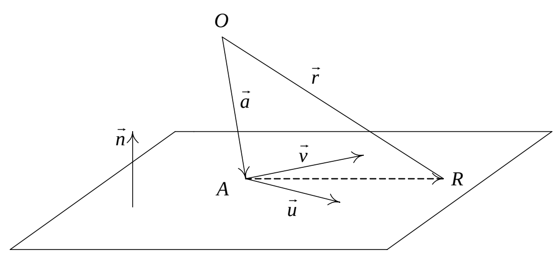
$\vec{BR} \perp \vec{n}$, siendo R un punto cualquiera del plano, entonces se debe tener

$$\vec{BR} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{b}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

La ecuación (1) se conoce como la ecuación vectorial de un plano, que también se puede expresar por $\vec{r} \cdot \vec{n} = p,\ p \in \mathbb{R}$.

Ecuación paramétrica

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores contenidos en el plano no colineales y $A(\vec{a})$ un punto cualquiera del plano



De la figura se tiene

$$\vec{OR} = \vec{OA} + \vec{AR} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{u} + t_2\vec{v},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

note que $\vec{AR}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

La ecuación (2) se llama ecuación paramétrica de un plano.

Ecuación Cartesiana

Sean: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ el punto fijo en el plano y $\vec{n} = (a, b, c)$ su normal, entonces remplazando en (1) resulta:

$(x - b_1, y - b_2, z - b_3) \cdot (a, b, c) = 0$, y de aquí $ax + by + cz + d = 0$ donde $d = -\vec{b} \cdot \vec{n}$

Ecuación de una recta por la intersección de dos planos

Sean las ecuaciones de dos planos no paralelos, dadas por:

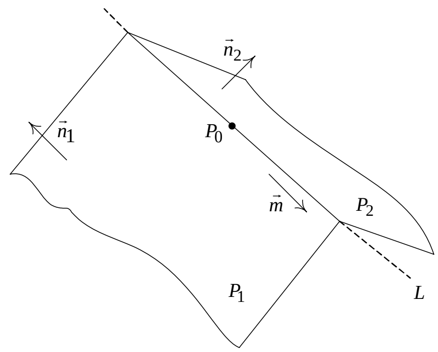
$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;\ \vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0;\ \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

P_1 y P_2 no paralelos $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$.

Resolviendo el sistema en términos de un parámetro, se obtiene la ecuación de la recta en cuestión, que se puede expresar por:

$$(\vec{r} - \vec{p}_0) \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = \vec{0},\ \text{donde}\ P_1 \cap P_2 = \{\vec{p}_0\}\ \text{y}\ \vec{m} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$



Ejemplo 3

Determine la ecuación paramétrica y simétrica de la recta

$$2x + y - 3z = 6$$
$$x - y + 6z = 6$$

Solución.

Resolviendo el sistema formado por los dos planos y eligiendo a z como parámetro, resulta:

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 5t \\ z = t \end{cases}$$

o también $\vec{r} = (4, -2, 0) + t(-1, 5, 1)$

y la forma simétrica es $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z}{1}$

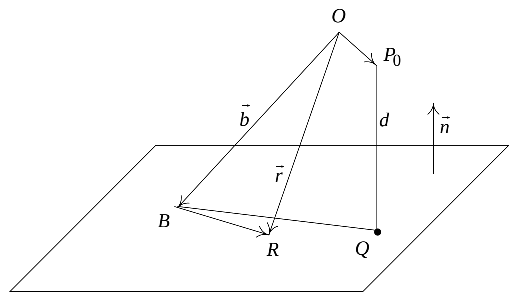
Distancia de un punto a un plano

Dada un plano cuya ecuación es $(\vec{r} - \vec{b}) \cdot \vec{n} = 0$, y sea $P_0(\vec{p}_0)$ un punto también dado, entonces

$$d = |\,(\vec{p}_0 - \vec{b}) \cdot \hat{n}\,|$$

Demostración.

Vamos a dar una demostración diferente a la expuesta en el capítulo 3



$$d = \| \vec{OQ} \| = \| t\,\vec{n} \| = |t|\,\| \vec{n} \| \qquad (1)$$

por otra parte

$\vec{OP_0} + \vec{P_0Q} + \vec{QB} = \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{p}_0 + t\,\vec{n} + \vec{QB} = \vec{b}$, haciendo $/ \cdot \vec{n}$,

se logra $\vec{p}_0 \cdot \vec{n} + t\,\vec{n} \cdot \vec{n} + \vec{QB} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n}$,

pero $\vec{QB} \cdot \vec{n} = 0$ por ser perpendiculares entre si

entonces $t = -\dfrac{(\vec{p}_0 - \vec{b}) \cdot \vec{n}}{\| \vec{n} \|^2}$, remplazando en (1) resulta

$$d = \left| -\frac{(\vec{p}_0 - \vec{b}) \cdot \vec{n}}{\| \vec{n} \|^2} \right| \| \vec{n} \| = | \, (\vec{p}_0 - \vec{b}) \cdot \widehat{n} \, |$$

En caso que el plano está dado por

$$ax + by + cz + q = 0 \text{ y } P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

entonces $d = \dfrac{| \, ax_0 + by_0 + cz_0 + q \, |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

<u>Perpendicularidad entre una recta y un plano.</u>

Una recta es perpendicular a un plano, si y solo si $\vec{m} = t\,\vec{n}, \; t \in \mathbb{R}$.

<u>Paralelismo entre una recta y un plano.</u>

Una recta no contenida en un plano es paralela a un plano, si y solo si $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

<u>Rectas paralelas.</u>

Dos rectas son paralelas entre si, si y solo si $\vec{m}_1 = t\vec{m}_2, \; t \in \mathbb{R}$

Note que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, L_1 y L_2 deben ser coplanares.

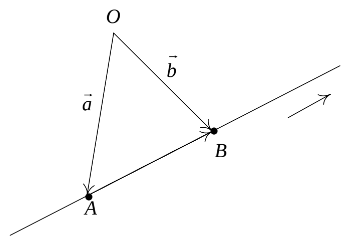
<u>Intersección de rectas.</u>

Dadas las rectas, $L_1 : (\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{m}_1 = \vec{0}$ y $L_2 : (\vec{r} - \vec{b}) \times \vec{m}_2 = \vec{0}$

$$L_1 \cap L_2 \neq \{P_0\} \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = 0$$

Ejercicios resueltos

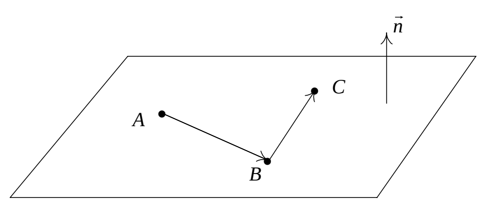
1. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(\vec{a})$ y $B(\vec{b})$



Solución.

Es claro que : $\vec{m} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ por tanto $\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$

2. Determine la ecuación de un plano que contiene a tres puntos no colineales, $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ y $C(\vec{c})$.



Solución.

De inmediato la ecuación paramétrica del plano resulta,

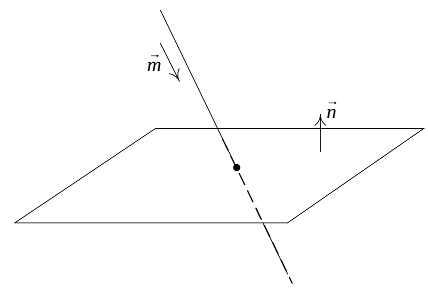
$$\vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{AB} + t_2\vec{BC};\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \text{ o bien}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + t_1(\vec{b} - \vec{a}) + t_2(\vec{c} - \vec{b});\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \text{ note que } \vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{b})$$

3. Determine el punto de intersección de la recta y el plano, cuyas ecuaciones se indican, si $\vec{m} \cdot \vec{n} \neq 0$

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{m} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$(\vec{r}-\vec{b})\cdot\vec{n}=0 \qquad (2)$$



Solución.

De (1), $\vec{r}=\vec{a}+t\,\vec{m}$ $\qquad (3)$ haciendo / $\cdot\,\vec{n}$ resulta

$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}+t\,\vec{m}\cdot\vec{n}$, de $(2):$ $\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\vec{n}$ así $\vec{b}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}+t\,\vec{m}\cdot\vec{n}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{n}}{\vec{m}\cdot\vec{n}}$, finalmente en $(3):$ $\vec{r}=\vec{a}+\dfrac{(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{n}}{\vec{m}\cdot\vec{n}}\,\vec{m}$

que es el vector de posición del punto de intersección.

4. Determine el punto de intersección de la recta $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ y el plano $3x+2y-6z=18.$

Solución.

Podríamos usar el resultado del ejercicio anterior, pero queremos dar otra forma de solución, entre otras.

Expresando la recta en sus componentes paramétricas, se tiene

$x=1-t,\; y=2t,\; z=t$ estas componentes deben satisfacer al plano, es decir

$3(1-t)+2(2t)-6t=18 \Leftrightarrow t=-3$ con lo que el punto de intersección

resulta $P_0(4,-6,-3).$

5. Dados los planos : $3x-2y+z=1$ y $2x+4y-5z=2.$ Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos dados

Solución.

El vector director de la recta de intersección está dado por $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ y es la normal del plano buscado, así

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (6, 17, 16)$$

luego $(x-1, y-2, z-3) \cdot (6, 17, 16) = 0 \Leftrightarrow 6x + 17y + 16z = 88$

6. Encontrar la ecuación del plano que:

   a) Pasa por un punto y es paralelo a dos rectas no paralelas.

   b) Contiene a una recta y es paralelo a otra.

   c) Pasa por dos puntos dados y es paralelo a una recta dada.

   d) Contiene a una recta y pasa por un punto.

   Solución.

   a) Sean $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ los vectores directores de las dos rectas y $\vec{p}_0$ el punto dado, note que el vector $\vec{m}_1 \times \vec{m}_2$ es perpendicular a todos los vectores del plano entonces $(\vec{r} - \vec{p}_0) \cdot (\vec{m}_1 \times \vec{m}_2) = 0$ es la ecuación del plano.

   b) Sean: L_1 $\vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{m}_1$ y $L_2 :$ $\vec{r} = \vec{b} + t_2\vec{m}_2$ las ecuaciones de las rectas dadas, tal como en la parte a), $\vec{m}_1 \times \vec{m}_2$ es la normal del plano, entonces $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{m}_1 \times \vec{m}_2) = 0$ es su ecuación, note que L_1 está contenida en el plano.

   c) Sea $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los puntos dados y $\vec{m}$ un vector paralelo a la recta dada. El plano pedido pasa por $\vec{a}$ y es paralelo a $(\vec{b} - \vec{a})$ y al vector $\vec{m}$, entonces su ecuación es $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{m}) = 0$ o también $(\vec{r} - \vec{b}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{m}) = 0.$

   d) Sea $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{m}$ la recta dada y $\vec{b}$ el vector de posición del punto dado, el plano pedido pasa por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, por tanto su normal está dada por $(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{m}$ luego su ecuación es $(\vec{r} - \vec{b}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{m}) = 0.$

7. Hallar la distancia desde el punto $(1, -1, 1)$ a la recta que une los puntos $(2, 1, -1)$ y $(3, 0, -1)$.

   Solución.

   Como la distancia desde $P_0 = (1, -1, 1)$ está dada por $d = \| (\vec{p}_0 - \vec{a}) \times \widehat{m} \|$ en este caso $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{m} = (3, 0, -1) - (2, 1, -1) = (1, -1, 0) \Rightarrow$ $\widehat{m} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ y $\vec{p}_0 - \vec{a} = (-1, -2, 2)$, así

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \| (-1, -2, 2) \times (1, -1, 0) \| = 4$$

8. Los puntos $A = (1, 1, -1)$, $B = (3, 3, 2)$ y $C = (3, -1, -2)$ determinan un plano.

   a) Hallar la normal del plano

   b) Determine su ecuación cartesiana.

   c) Calcular la distancia del origen al plano.

   Solución.

   a) $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (4, 8, -8)$

   b) $(x-1, y-1, z+1) \cdot (4, 8, -8) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 5 = 0$

   c) $d = \dfrac{|0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5\,|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3}$

9. Dadas las ecuaciones de 4 planos por:

   $P_1 : x + 2y - 2z = 5$ $\qquad P_2 : 3x - 6y + 3z = 2$

   $P_3 : 2x + y + 2z = -1$ $\qquad P_4 : x - 2y + z = 7$

   a) Demuestre que dos de ellos son paralelos y los otros dos perpendiculares.

   b) Calcule la distancia entre los dos planos paralelos.

   Solución.

   a) Los planos paralelos son P_2 y P_4, pues

   $$\vec{n}_2 = (3, -6, 3) = 3(1, -2, 1) = 3\,\vec{n}_4$$

   Los planos perpendiculares son P_1 y P_3, pues

   $$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = (1, 2, -2) \cdot (2, 1, 2) = 0$$

   b) Basta obtener un punto del plano P_4 y obtener la distancia de este punto al plano P_2, sea el punto mencionado $(2, -2, 1)$ entonces,

   $$d = \frac{|3 \cdot 2 - 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{9 + 36 + 9}} = \frac{19}{\sqrt{54}} = \frac{19}{3\sqrt{6}}$$

10. Dada la recta l y el plano π, por

$$l: \begin{array}{l} \lambda x + 2y + z = 1 \\ 3x \qquad\quad - z = 2\lambda \end{array} \qquad \pi: \; x + 2y - \lambda z = 10$$

Determine λ en los siguientes casos:

a) l sea paralela a π
b) $l \cap \pi = \{P_0\}$ y encuentre las coordenadas de P_0
c) La proyección ortogonal de l paralela, sobre el plano π.

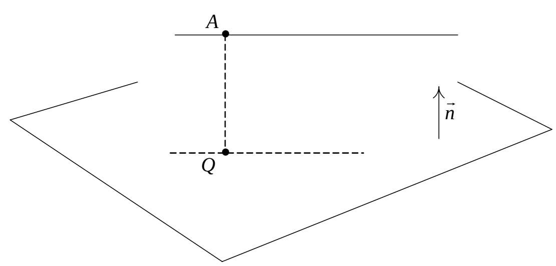
Solución.

a) Se debe tener que $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0 \Rightarrow (1,2,-\lambda) \cdot (\lambda,2,1) \times (3,0,-1) = 0$

$$(1,2,-\lambda) \cdot (-2,\lambda+3,-6) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

b) De inmediato se debe imponer que $\vec{n} \cdot \vec{m} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{1}{2}$

c) l paralela a π, implica $\lambda = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2y + z = 1 \\ 3x \qquad\quad - z = -1 \end{cases}$



Tan solo debemos determinar el punto Q pie de la perpendicular bajada desde A que pertenece a l, pues la dirección de la recta pedida es la misma que de la recta l es decir $\vec{m} = (-4,5,-12)$, con $A = (0,0,1)$

Para determinar $Q = (x,y,z)$, se sigue:

$$\vec{QA} = t\vec{n} \Leftrightarrow (-x,-y,1-z) = t\left(1,2,\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 1 - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

como Q debe pertenecer al plano, se debe tener

$$-t + 2(-2t) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}t) = 10 \Leftrightarrow t = -\frac{38}{21} \Rightarrow Q = (\frac{38}{21}, \frac{76}{21}, \frac{40}{21})$$

luego la ecuación de la recta pedida es

$$\vec{r} = (\frac{38}{21}, \frac{76}{21}, \frac{40}{21}) + t(-4, 5, -12),\ t \in \mathbb{R}$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por (a, b, c) y es perpendicular a los planos $P_1: ax + by + cz = 1$ y $P_2: x + y + z = abc$

Solución.

La normal del plano pedido debe ser perpendicular a cada uno de los planos dados por tanto, $\vec{n} = (a, b, c) \times (1, 1, 1) = (b - c, c - a, a - b)$ por tanto la ecuación resulta $(b - c)x + (c - a)y + (a - b)z - (b - c, c - a, a - b) \cdot (a, b, c) = 0$ $(b - c)x + (c - a)y + (a - b)z = 0.$

12. Dados los planos:

$$P_1 : x - cy - bz = 0;\ P_2 :\ -cx + y - az = 0 \text{ y } P_3 : -bx - ay + z = 0$$

Determinar la condición que deben cumplir los coeficientes a, b y c para que los planos dados se entersecten según una recta.

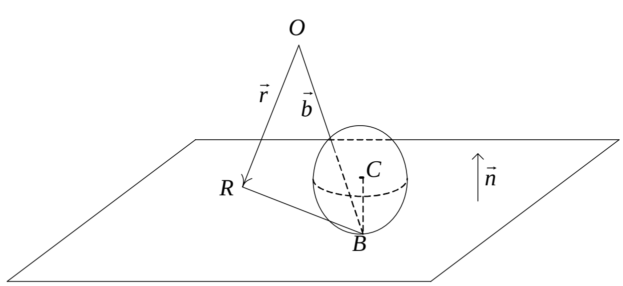
Solución.

Se debe tener que $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = t\vec{n}_3,\ t \in \mathbb{R}$

o lo que es equivalente a $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1.$$

13. Demostrar que la ecuación vectorial del plano tangente a una esfera de radio a y centro C está dada por: $(\vec{r} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = a^2$, donde B es el punto de tangencia entre el plano y la esfera.



Solución.

De la figura se tiene, $\vec{BR} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0,\ \vec{n} = \vec{c} - \vec{b}$

por otra parte $\vec{b} = \vec{c} - (\vec{c} - \vec{b}) \Rightarrow [\vec{r} - \vec{c} + (\vec{c} - \vec{b})] \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow$
$(\vec{r} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \| \vec{c} - \vec{b} \|^2 = a^2$

14. Demostrar que si dos rectas dadas por: $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{m}_1 = \vec{0}$ y $(\vec{r} - \vec{c}) \times \vec{m}_2 = \vec{0}$ se intersecan, entonces: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = 0$

Demostración.

Expresando las rectas en su forma paramétrica, se tiene:

$$\vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{m}_1 \text{ y } \vec{r} = \vec{c} + t_2\vec{m}_2,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

si las rectas se intersecan existe escalares t_1 y t_2 tales que:

$\vec{a} + t_1\vec{m}_1 = \vec{c} + t_2\vec{m}_2,$ tomando el producto punto por $\vec{m}_1 \times \vec{m}_2,$ se obtiene

$\vec{a} \cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \vec{c} \cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = 0$

15. Demuestre que el punto de intersección de las rectas coplanares y no paralelas $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{a}_0$ y $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{b}_0$ está dado por

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}_0 \times \vec{b}_0}{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}} \quad \text{con } \vec{a}_0 \cdot \vec{b} \neq 0$$

Solución.

Efectuando $\vec{a}_0 \times$ por la ecuación $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{b}_0$ resulta

$$\vec{a}_0 \times (\vec{r} \times \vec{b}) = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0 \Leftrightarrow (\vec{a}_0 \cdot \vec{b})\vec{r} - (\vec{a}_0 \cdot \vec{r})\vec{b} = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0 \quad (1)$$

Por otra parte, haciendo $\cdot \vec{r}$ por la ecuación $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{a}_0$ resulta :

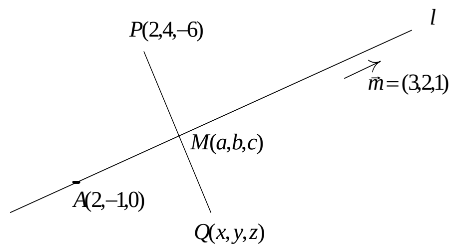
$(\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{r} = (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) \Leftrightarrow (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) = 0,$ en (1) y se tiene

$$(\vec{a}_0 \cdot \vec{b})\vec{r} = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0 \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{\vec{a}_0 \times \vec{b}_0}{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}}$$

16. Determine un punto Q simétrico del punto $P(2, 4, -6)$ con respecto a la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$$

Solución.



Sea M punto medio del trazo PQ, M sobre recta l y $MP \perp l$; entonces

$\vec{MP} \cdot \vec{m} = 0 \Leftrightarrow (2-a, 4-b, -6-c) \cdot (3,2,1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 8$

$M \in l \Rightarrow \dfrac{a-2}{3} = \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{c}{1} \Rightarrow 2a - 3b = 7 \;\wedge\; b - 2c = -1;$

de donde resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 8 \\ 2a - 3b \quad &= 7 \\ b - 2c &= -1 \end{aligned}$$

resultan: $a = \dfrac{20}{7}$; $b = -\dfrac{3}{7}$ y $c = \dfrac{2}{7}$

Así por ser M punto medio, entonces:

$$\frac{2+x}{2} = a \Rightarrow x = \frac{26}{7}$$

$$\frac{4+y}{2} = b \Rightarrow y = -\frac{34}{7}$$

$$\frac{-6+z}{2} = c \Rightarrow z = \frac{46}{7}$$

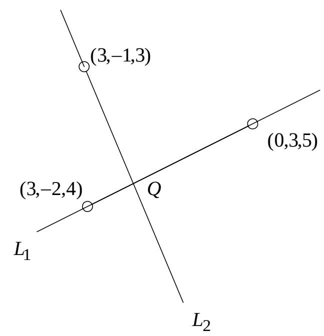
por tanto el punto simétrico de P es, $Q = (\dfrac{26}{7}, -\dfrac{34}{7}, \dfrac{46}{7})$

17. a) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(3, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(3, -2, 4)$ y $(0, 3, 5)$

b) Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos: $(2, 3, 4)$, $(1, 1, 1)$ y $(-5, 3, 2)$

Solución.

a) <u>Primera forma</u>



Ecuación de $L_1 : \vec{r} = (3,\,-2,4) + t(-3,5,1);\ \vec{m}_1 = (-3,5,1)$

Sea $\vec{m}_2 = (a,b,1)$ la dirección de la recta L_2, se debe tener que $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0$

$\Rightarrow\ -3a + 5b + 1 = 0,$ así la ecuación de L_2 resulta

$\vec{r} = (3,\,-1,3) + u\left(\frac{1}{3}[5b+1], b, 1\right)$

Intersecando L_1 y L_2 se tiene

$$(3,\,-2,4) + t(-3,5,1) = (3,\,-1,3) + u\left(\frac{1}{3}[5b+1], b, 1\right)$$

de donde se obtienen:

$$\begin{aligned} 3 - 3t &= 3 + u\frac{1}{3}[5b+1] \\ -2 + 5t &= -1 + bu \\ 4 + t &= 3 + u \end{aligned}$$

resolviendo:

$$t = \frac{4}{35}, u = \frac{39}{35} \text{ y } b = -\frac{5}{13}$$

Con lo que la ecuación pedida es

$$\vec{r} = (3,\,-1,3) + u\left(-\frac{4}{13}, -\frac{5}{13}, 1\right)$$

<u>Segunda forma</u>

Con la dirección de la recta L_1 y el punto dado determinamos la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta L_1, luego intersecamos esta recta con dicho plano y obtenemos el punto Q, que pertenece a L_2, así con el punto indicado y Q obtenemos la ecuación de la recta pedida.

Ecuación del plano : $3x - 5y - z - 11 = 0$

Ecuación de L_1 : $\vec{r} = (3,\,-2,4) + t(3,\,-5,\,-1)$

Intersecando L_1 con el plano, se tiene

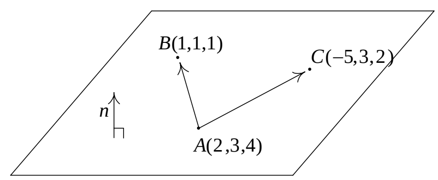
$$3(3+3t)-5(-2-5t)-(4-t)-11=0 \Rightarrow t=-\frac{4}{35}$$

Así, $Q=(3-\frac{12}{35},-2+\frac{20}{35},4+\frac{4}{35})=(\frac{93}{35},-\frac{50}{35},\frac{144}{35})$

luego $\vec{m}_2=(3,-1,3)-(\frac{93}{35},-\frac{50}{35},\frac{144}{35})=(\frac{12}{35},\frac{15}{35},-\frac{39}{35})$

$=-\frac{39}{35}(-\frac{4}{13},-\frac{5}{13},1)$, dirección que coincide con la obtenida en la primera forma.

b)



Primera forma

La ecuación del plano pedido es $[\vec{r}-(2,3,4)]\cdot\vec{n}=0$, con $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}$

y $\vec{n}=(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ -1 & -2 & -3\\ -7 & 0 & -2\end{vmatrix}=(4,19,-14)$

Así:

$$[\vec{r}-(2,3,4)]\cdot(4,19,-14)=0 \Leftrightarrow 4x+19y-14z-9=0$$

Segunda forma

La ecuación del plano pedido en su forma paramétrica es

$$\vec{r}=(2,3,4)+t_1(\vec{b}-\vec{a})+t_2(\vec{c}-\vec{a})$$

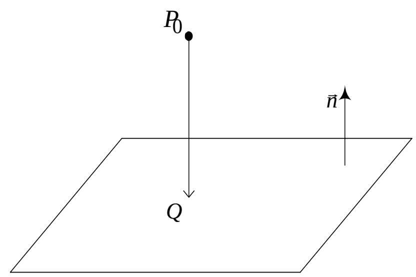
$$\vec{r}=(2,3,4)+t_1(-1,-2,-3)+t_2(-7,0,-2)$$

Note que $(-1,-2,-3)$ y $(-7,0,-2)$ son no colineales (L.I.)

18. a) Dada la ecuación de un plano por $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$, demuestre que la distancia desde un punto P_0 al plano dado, está dada por $\frac{1}{||\vec{n}||}|\,d-\vec{p}_0\cdot\vec{n}\,|$, con $\vec{p}_0\cdot\vec{n}\neq d$. ¿Como se puede interpretar la condición $\vec{p}_0\cdot\vec{n}\neq d$?

b) Calcule la distancia desde el punto $P_0(2,3,-4)$ al plano $3x-4y+7z=21$

Solución.



De la figura se tiene

$$\vec{P_0Q} = t\,\vec{n} \Leftrightarrow \vec{q} - \vec{p}_0 = t\,\vec{n} \ \ / \cdot \vec{n} \ \Rightarrow \vec{q} \cdot \vec{n} - \vec{p}_0 \cdot \vec{n} = t\,\vec{n} \cdot \vec{n} \ \Leftrightarrow$$

$t = \dfrac{\vec{q} \cdot \vec{n} - \vec{p}_0 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \dfrac{d - \vec{p}_0 \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2}$, pués Q pertenece al plano$(\vec{q} \cdot \vec{n} = d)$

La distancia pedida es $||\vec{P_0Q}|| = \left| \dfrac{d - \vec{p}_0 \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2} \right| ||\vec{n}|| = \dfrac{1}{||\vec{n}||} |\, d - \vec{p}_0 \cdot \vec{n}\,|$

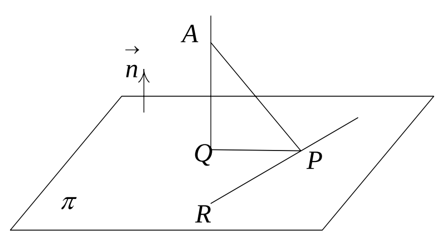
$\vec{p}_0 \cdot \vec{n} \neq d \ \Rightarrow P_0$ no pertenece al plano $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$.

b) Aplicando la fórmula de la parte a), se tiene

$$d = \frac{1}{\sqrt{74}} |21 - (-34)| = \frac{55}{\sqrt{74}}$$

19. Si desde un punto A de una recta, perpendicular a un plano π, se baja una perpendicular a una recta R del plano π, demuestre que la recta determinada por los pies de estas perpendiculares es perpendicular a la recta R.

Solución.



Sean $\vec{m}_1$ la dirección $\vec{AP}$, $\vec{m}_2$ la dirección de R y $\vec{n}$ la dirección del plano, entonces

Por hipótesis: $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{m}_2 = 0$

Tesis: $\vec{QP} \cdot \vec{m}_2 = 0$

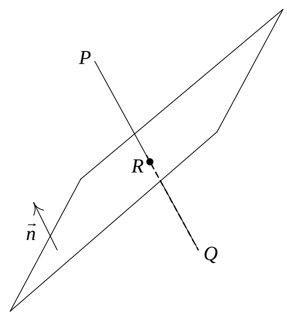
En efecto, de la figura $\vec{AQ}+\vec{QP}=\vec{AP} \Leftrightarrow \vec{QP}=\vec{AP}-\vec{AQ}$

$$\vec{QP}=t_1\vec{m}_1-t_2\vec{n}$$

$$\vec{QP}\cdot\vec{m}_2=t_1\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2-t_2\vec{n}\cdot\vec{m}_2=t_1\cdot 0-t_2\cdot 0=0$$

20. Hallar el punto Q que es simétrico al punto $P(1,2,-4)$ con respecto plano $3x+4y-7z-11=0$.

Solución.



Sea R el pie de la perpendicular bajada desde P y que pertenece al plano $3x+4y-7z-11=0$.

Entonces R es punto medio entre $\vec{PQ}$, Q punto pedido.

Sea $R(a,b,c)$, luego $\vec{PR}=t\,\vec{n} \Leftrightarrow (a-1,b-2,c+4)=t(3,4,-7)$ de donde $a=1+3t,\ b=2+4t$ y $c=-4-7t$, pero R pertenece al plano $\Rightarrow$

$3(1+3t)+4(2+4t)-7(-4-7t)-11=0 \Rightarrow t=-\dfrac{12}{37}$,

Así $R\left(\dfrac{-5}{37},\dfrac{18}{37},-\dfrac{50}{37}\right)$,

finalmente $\dfrac{x+1}{2}=-\dfrac{5}{37},\ \dfrac{y+2}{2}=\dfrac{18}{37}$ y $\dfrac{z-4}{2}=-\dfrac{50}{37}$

de donde resulta $Q\left(-\dfrac{47}{37},-\dfrac{38}{37},\dfrac{48}{37}\right)$

21. Dado el sistema

$$x+y+az=1$$
$$x+y+\ \ z=a$$

y el plano

$$2x+by+z=1$$

a) Determine a de modo que el sistema dado represente a una recta.

b) Encuentre a y b de modo que la recta y el plano sean paralelos.(considere a)).

c) Encuentre a y b de modo que la recta y el plano intersecten en un punto.

d) Considerando a) y c) ¿será posible que el plano y la recta sean perpendiculares?

Solución.

a) Los planos no pueden ser paralelos, entonces $(1,1,a) \neq t(1,1,1) \Rightarrow a \neq 1$

b) Con $a \neq 1$ se debe tener que $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0 \Leftrightarrow (2,b,1) \cdot (1-a, a-1, 0) = 0$
$\Leftrightarrow (a-1)(b-2) = 0$ pero $a \neq 1 \Rightarrow b = 2.$

c) De inmediato $a \neq 1$ y $b \neq 2$

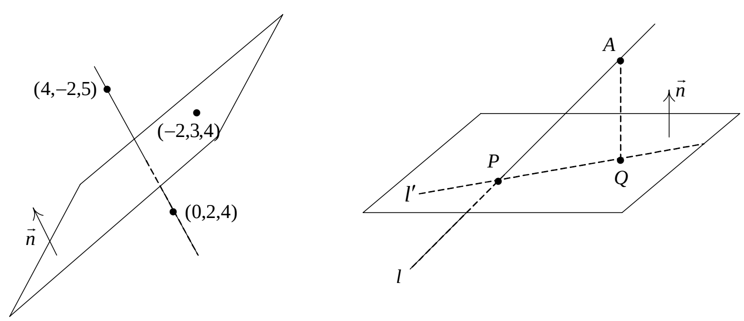
d) Se debe tener que $\vec{m} = t\vec{n},\ t \neq 0 \Leftrightarrow (1-a, a-1, 0) = t(2,b,1)$ lo que da $t = 0 \Rightarrow \Leftarrow$, no existen a y b.

22. Sea la recta l que une los puntos $(4,-2,5)$ y $(0,2,4)$.

a) Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(-2,3,4)$ y es perpendicular a la recta l.

b) Encuentre la ecuación de la proyección de la recta l, sobre el plano $x+y+z=1$.

Solución.



a) $\vec{n} = (4,-2,5) - (0,2,4) = (4,-4,1)$, entonces la ecuación del plano en cuestión resulta : $(x+2, y-3, z-4) \cdot (4,-4,1) = 0$, o bien $4x - 4y + z + 16 = 0$

b) Primero determinamos P punto de intersección de l con el plano $x+y+z=1$.

Las ecuaciónes paramétricas de l son:

$$x = 4t,\ y = 2 - 4t \text{ y } z = 4 + t$$

estas componentes deben satisfacer la ecuación del plano, esto es

$4t+2-4t+4+t \ = 1 \Leftrightarrow t = -5$, así: $P = (-20, 22, -1)$

Ahora determinamos Q, para lo que: $\vec{QA} = t\,\vec{n}$, con $Q = (x, y, z)$

$A = (0,2,4)$ y $\vec{n} = (1,1,1)$; así,

$(0,2,4) - (x,y,z) = t(1,1,1) \Leftrightarrow x = -t, \ y = 2-t, \ z = 4-t$

Como Q pertenece al plano entonces:

$$-t+2-t+4-t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow Q(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3})$$

por tanto la recta pedida es

$$\vec{r} = (-20, 22, -1) + \lambda\{(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}) - (-20, 22, -1)\}$$

$\vec{r} = (-20, 22, -1) + \lambda(\frac{55}{3}, -\frac{65}{3}, \frac{10}{3})$ o bien

$\vec{r} = (-20, 22, -1) + t(11, -13, 2)$

23. Sean la recta $l: \ 2x - y = 0 \wedge x + y - z = 0$

y el plano $\pi: \ x + k\,y + 2z = p - 2$

a) Determine k y p de modo que:

i) La recta l sea paralela al plano π

ii) La recta l esté contenida en el plano π

iii) La recta l intersecte al plano π en un punto.

b) Encuentre la : $proy_{\pi}\vec{u}$ y la $proy_{l}\vec{u}$, si $u = (2,3,0)$, considere $k = 1$ y $p = 2$

Solución.

a)

i) Se debe tener que $\vec{m}\cdot\vec{n} = 0$ y que para este valor de k, las coordenadas de la recta no satisfaga la ecuación del plano, así:

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = (1,2,3)\cdot(1,k,2) = 0 \Leftrightarrow \underline{k = -\frac{7}{2}}$$

Ahora como $\vec{r} = (t, 2t, 3t)$ y remplazando en la ecuación del plano

$t - \frac{7}{2}\cdot 2t + 2\cdot 3t = p - 2 \Leftrightarrow 0 = p - 2$, entonces se debe tener $\underline{p \neq 2}$

ii) También se debe tener que $\vec{m}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow \underline{k = -\frac{7}{2}}$ pero ahora $\underline{p = 2}$.

iii) Es suficiente que $k \neq -\frac{7}{2}$ y p cualquier real.

b) Sean $A(2,3,0),\ Q(x,y,z)\in\pi,\ \vec{QA}=t\,\vec{n}\Rightarrow proy_\pi\vec{u}=\vec{OQ},$ luego
$(2-x,\,3-y,\,-z)=t\,(1,1,2)\ \Rightarrow x=2-t;\ y=3-t$ y $z=\,-2t,$
como Q pertenece a $\pi\ \Rightarrow 2-t+\ (3-t)\ +2(-2t)\ =0\ \Rightarrow t=\dfrac{5}{6}\ \Rightarrow$
$proy_\pi\vec{u}=(2-\dfrac{5}{6},\,3-\dfrac{5}{6},\,-2(\dfrac{5}{6}))=\dfrac{1}{6}(7,13,\,-10).$
Por otra parte, $proy_l\vec{u}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{m}}{\|\vec{m}\|^2}\,\vec{m}=\dfrac{4}{7}(1,2,3)$

24. Sea P el plano cuya ecuación es $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ y L la recta cuya ecuación es $(\vec{r}-\vec{b})\times\vec{m}=\vec{0}$, si $A\notin L$, demuestre que: $L\subseteq P\Leftrightarrow[(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}$

Demostración.

$(\Rightarrow)$

Supongamos que $L\subseteq P$, demostraremos que $[(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}$
Si $L\subseteq P\ \Rightarrow b\in P$ y $\vec{m}$ está en P, luego $(\vec{a}-\vec{b})$ y $\vec{m}$ están en P entonces $(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}$ es perpendicular a $P\Rightarrow(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}$ es paralelo a $\vec{n}\Leftrightarrow$
$[(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}.$

$(\Leftarrow)$

Sea $c\in L$, por demostrar que $c\in P$ o lo que es equivalente a $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$
ahora, si $c\in L\Rightarrow(\vec{c}-\vec{b})\times\vec{m}=\vec{0}\ \Rightarrow\ [(\vec{c}-\vec{b})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}$
y como por hipótesis $[(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}$
de donde restando ambas expresiones, resulta:

$[(\vec{c}-\vec{b})\times\vec{m}-(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}\ \Rightarrow\ [(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{m}]\times\vec{n}=\vec{0}$, de aquí

$[(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{n}]\vec{m}-(\vec{m}\cdot\vec{n})(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}$, ahora si $\vec{m}$ y $(\vec{c}-\vec{a})$ son linealmente dependientes $(\vec{c}-\vec{a})=t\,\vec{m}\Rightarrow\vec{a}$ pertenece a la recta que pasa por $\vec{c}$ y tiene dirección $\vec{m}$, como $\vec{c}\in L$ se tiene que esta recta es L luego $\vec{a}\in L$, lo que no ser pues contradice la hipótesis, luego $\vec{m}$ y $(\vec{c}-\vec{a})$ son linealmente indepenpendientes, entonces: $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{n}\quad\wedge\quad\vec{m}\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\vec{c}\in P.$

26. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1,0,2)$ y es paralela al plano dado por $x+y+z=5$ y perpendicular a la recta $x=t,\ y=1-t,\ z=2t$

Solución.

El vector director $\vec{m}$ de la recta pedida debe ser perpendicular al vector normal del plano y a la dirección de la recta dada, sea $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ entonces $(m_1, m_2, m_3) \cdot (1, 1, 1) = 0$ y $(m_1, m_2, m_3) \cdot (1, -1, 2)$ de don de se obtiene $\vec{m} = (-3, 1, 2)$, por tanto la ecuación paramétrica de la recta en cuestión, es $\vec{r} = (1, 0, 2) + t(-3, 1, 2)$.

27. Determine la ecuación de la recta que pasa por $P_0 = (2, 0, -2)$ y corta a las rectas $l_1 : \vec{r} = \vec{a} + t_1\vec{u}_1$ y $l_2 : \vec{r} = \vec{b} + t_2\vec{u}_2$ donde:
$\vec{a} = (3, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, -2)$, $\vec{u}_1 = (2, 1, 2)$, y $\vec{u}_2 = (3, -1, 2)$

Solución.

Primero determinamos las ecuaciones de los planos formados por: P_0 con l_1 y P_0 con l_2,

$\vec{n}_1 = (\vec{a} - \vec{p}_0) \times \vec{u}_1 = (1, 0, 1) \times (2, 1, 2) = (-1, 0, 1)$

$\vec{n}_2 = (\vec{b} - \vec{p}_0) \times \vec{u}_2 = (-2, -1, 0) \times (3, -1, 2) = (-2, 4, 5)$

Así:

$P_1 : -x + y + d_1 = 0,\ d_1 = -(2, 0, -2) \cdot (-1, 0, 1) = 4$

$P_2 : -2x + 4y + 5z + d_2 = 0,\ d_2 = -(2, 0, -2) \cdot (-2, 4, 5) = 14$

La recta pedida es la intersección de P_1 y P_2 que resulta

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-4}$$

28. Un punto P se mueve de manera que en cada instante t, su posición es:
$\vec{p} = (1-t)\,\widehat{i} + (2-3t)\,\widehat{j} + (2t-1)\,\widehat{k}$

a) Probar que su trayectoria es una recta L que pasa por el punto $P_0(4, 11 - 7)$.

b) En que instante y en que punto el móvil llega al plano $2x + 3y + 2z + 1 = 0$

c) Hallar la ecuación del plano perpendicular a L en la posición del móvil correspondiente al instante $t = 2$.

Solución.

a) De inmediato $\vec{p} = (1, 2, -1) + t(-1, -3, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y para $t = -3$ pasa por el punto P_0.

b) Efectuando la intersección con el plano, se tiene:

$2(1-t)+3(2-3t)+2(2t-1)+1=0 \Rightarrow t=1$ y el punto es $(0,-1,1)$

c) La normal del plano pedido es la dirección de la recta L, es decir $(-1,-3,2)$ y para $t=2$ se obtiene un punto de dicho plano que es $(-1,-4,3)$, así la ecuación del plano resulta $x+3y-2z+19=0$

29. Probar que una recta del plano XY que pasa por un punto P_0 se puede expresar mediante la ecuación $\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{p}_0\cdot\vec{n}$, siendo $\vec{n}$ la normal del plano XY.

Prueba.

Sea la ecuación de la recta: $(\vec{r}-\vec{p}_0)\times\vec{m}=0 \Leftrightarrow \vec{r}\times\vec{m}=\vec{p}_0\times\vec{m}$ de donde $(\vec{r}\times\vec{m})\times\vec{n}=(\vec{p}_0\times\vec{m})\times\vec{n} \Leftrightarrow$ $(\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{m}-(\vec{n}\cdot\vec{m})\vec{r}=(\vec{n}\cdot\vec{p}_0)\vec{m}-(\vec{n}\cdot\vec{m})\vec{p}_0$, pero $\vec{n}\cdot\vec{m}=0 \Leftrightarrow$ $(\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{m}=(\vec{n}\cdot\vec{p}_0)\vec{m}$, tomando norma resulta $(\vec{n}\cdot\vec{r})\|\vec{m}\|=|(\vec{n}\cdot\vec{p}_0)\|\vec{m}\|$, así $\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{p}_0\cdot\vec{n}$, como se pretendía.

30. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el origen y que contiene a la recta de intersección de los planos: $P_1:\vec{r}\cdot\vec{a}=p \ \wedge \ P_2:\vec{r}\cdot\vec{b}=q$

Solución.

La familia de planos que contiene a la recta intersección de P_1 y P_2 está dada por: $\vec{r}\cdot\vec{a}-p+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{b}-q)=0$ ahora como se pide el plano de esta familia que pasa por el origen, entonces $\vec{0}\cdot\vec{a}-p+\lambda(\vec{0}\cdot\vec{b}-q)=0 \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{p}{q}$, luego resulta $\vec{r}\cdot(q\vec{a}-p\vec{b})=0$

31. Demostrar que las rectas AA' y BB' son coplanares y encontrar su punto de intersección, donde

$$A=(4,5,1) \text{ y } A'=(3,9,4),\quad B=(-4,4,4) \text{ y } B'=(0,-1,-1)$$

Demostración.

Por el ejercicio resuelto 14, la condición de dos rectas coplanares esta dada por $(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{m}_1\times\vec{m}_2=0$, siendo las rectas cuyas ecuaciones son:

$$\vec{r}-\vec{a}=t_1\vec{m}_1 \ \text{ y } \ \vec{r}-\vec{c}=t_2\,\vec{m}_2$$

entonces: $[(4,5,1)-(-4,4,4)]\cdot(-1,4,3)\times(4,-5,-5)=$

$(8,1,-3)\cdot(-5,7,-11)=0$

note que $\vec{m}_1\times\vec{m}_2=(-5,7,-11)\neq\vec{0}$, las rectas no son paralelas.

recta $AA':\vec{r}=(4,5,1)+t_1(-1,4,3)$

recta BB': $\vec{r} = (-4,4,4) + t_2(4,-5,-5)$

Como aseguramos que las rectas se intersecan es suficiente resolver el sistema

$$\begin{cases} 4 - t_1 = 4t_2 - 4 \\ 5 + 4t_1 = -5t_2 + 4 \\ 1 + 3t_1 = -5t_2 + 4 \end{cases}$$

de donde $t_1 = -4$ y $t_2 = 3$, por tanto $P_0 = (8,-11,-11)$.

Mismo resultado se obtiene a través del ejercicio resuelto 15.

32. Dados los planos

$$P_1 : 3x + 2y + z = 5$$

$$P_2 : \;\; x + 2y - z = 10$$

a) Determine los ángulos que forman los dos planos

b) Determine las ecuaciones de los planos bisectores y demuestre que sus normales son perpendiculares entre si.

Solución.

a) De inmediato $cos\,\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|} = \dfrac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha \approx 49,10°$ luego

$\beta \approx 130,9°$

b) Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera en uno de los planos bisectores, se debe tener que la distancia de P a P_1 y a P_2 debe ser la misma, es decir

$$\frac{|\,3x + 2y + z - 5\,|}{\sqrt{14}} = \frac{|\,x + 2y - z - 10\,|}{\sqrt{6}}$$

de donde se obtienen: $\sqrt{6}\,(3x + 2y + z - 5) = \pm\sqrt{14}\,(x + 2y - z - 10\,)$, luego las ecuaciones de los planos bisectores, resultan ser:

$$(3\sqrt{6} - \sqrt{14})x + 2(\sqrt{6} - \sqrt{14})y + (\sqrt{6} + \sqrt{14})z - 5(\sqrt{6} - 2\sqrt{14}) = 0$$
$$(3\sqrt{6} + \sqrt{14})x + 2(\sqrt{6} + \sqrt{14})y + (\sqrt{6} - \sqrt{14})z - 5(\sqrt{6} + 2\sqrt{14}) = 0$$

note que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (54 - 14) + 4(-8) + (-8) = 0$, luego $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son perpendiculares entre si.

33. Dos rectas $l_1 :\; \vec{r} \times \vec{m}_1 = \vec{p}$ y $l_2 : \vec{r} \times \vec{m}_2 = \vec{q}$ son coplanares si y solo si

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{q} + \vec{m}_2 \cdot \vec{p} = 0$$

Demostración.

Sean : $A \in l_1 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{m}_1 = \vec{p}$, y $B \in l_2 \Leftrightarrow \vec{b} \times \vec{m}_2 = \vec{q}\,.$

Como A, B son puntos en l_1 y l_2, las rectas son coplanares si y solo si los vectores: $\vec{BA}$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ son coplanares, es decir cuando $(\vec{a}-\vec{b})\cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = 0$ de donde $\vec{a}\cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 - \vec{b}\cdot \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \vec{a}\times \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{b}\times \vec{m}_2 \cdot \vec{m}_1 = 0$ o bien $\vec{p}\cdot \vec{m}_2 + \vec{q}\cdot \vec{m}_1 = 0$ que es lo mismo que $\vec{m}_1 \cdot \vec{q} + \vec{m}_2 \cdot \vec{p} = 0$

34. Demuestre que la distancia mínima entre las rectas no paralelas

$$l_1 : \ \vec{r}\times \vec{m}_1 = \vec{p} \ \text{ y } \ l_2 : \ \vec{r}\times \vec{m}_2 = \vec{q} \ \text{ es } \ d = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{q} + \vec{m}_2 \cdot \vec{p}\,|}{\|\ \vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2 \,\|}$$

Demostración.

Si A, B son puntos en l_1 y l_2 respectivamente, la distancia d entre ellas tiene el mismo valor numérico que la proyección ortogonal de $\vec{BA}$ sobre la normal común que es $\vec{m}_1 \times \vec{m}_2$, es decir

$$d = \|\,(\vec{a}-\vec{b})\cdot \frac{\vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2}{\|\ \vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2\,\|^2}(\vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2)\,\|$$

$$= \frac{|(\vec{a}-\vec{b})\cdot \ \vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2|\,\|\vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2\,\|}{\|\ \vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2\,\|^2} = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{q} + \vec{m}_2 \cdot \vec{p}\,|}{\|\ \vec{m}_1 \times \ \vec{m}_2\,\|}$$

Note que se ocupó el resultado del problema 33.

Ejercicios propuestos

1. Determine la ecuación de la recta de intersección de los planos

$$P_1 : \vec{r}\cdot(2,3,1) = 2 \ \text{ y } \ P_2 : \vec{r}\cdot(3,1,-1) = 4$$

Respuesta.

$$\vec{r} = (0,-3,-7) + t(2,5,11)$$

2. Demostrar que los planos

$$P_1 : \vec{r}\cdot(2,5,4) = 0, \ \ P_2 : \vec{r}\cdot(1,-1,4) = 2 \ \text{ y } \ P_3 : \vec{r}\cdot(0,7,-4) = -4$$

tienen una recta común de intersección.

3. Sea la recta que pasa por $A = (1,-2,1)$ y $B = (0,2,3)$, encontrar el punto de intersección de esta recta con el plano que pasa por el origen y por los puntos

$(0,4,0)$ y $(2,0,1)$.

Respuesta

$P_0 = \left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{14}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

4. Hallar la mínima distancia entre la recta que une los puntos $(1,2,3)$ y $(-1,0,2)$ y la que une los puntos $(0,1,7)$ y $(2,0,5)$.

   Respuesta

   3

5. Hallar la mínima distancia desde el punto $(1,-2,1)$ al plano determinado por los tres puntos $(2,4,1)$, $(-1,0,1)$ y $(-1,4,2)$.

   Respuesta

   $\frac{14}{13}$

6. Demostrar que la ecuación del plano que contiene tres puntos dados cuyos vectores de posición son: $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ puede expresarse en la forma

   $$[3\vec{r} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) = 0$$

   donde $\vec{r}$ es el vector posición de cualquier vector del plano.

7. Hallar el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $6x + 7y + 14z - 42 = 0$

   Respuesta.

   21

8. Dado el plano π: $2x + 3y + 4z = 12$

   a) Determine la ecuación de la recta l que pasa por el origen y es perpendicular al plano π.

   b) Encuentre la proyección ortogonal del vector $(2,1,3)$ sobre dicho plano y sobre la recta l mencionada en a).

9. En $\mathbb{R}^3$, dada la recta l : $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{4}$

   a) Determine k para que el plano π, que pasa por los puntos $A(2,3,k)$ y $B(1,2,3)$ sea perpendicular a la recta l. Encuentre la ecuación del plano π.

   b) Encuentre las coordenadas del punto C de intersección, del plano π con la recta l.

Respuesta.

a) $k=2,\ 3x+y+4z-17=0$

b) $\left(\frac{41}{13},\frac{18}{13},\frac{20}{13}\right)$

10. Encuentre la recta proyección, de la recta $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ sobre el plano de ecuación $4x+2y-2z-1=0$

Respuesta.

$$\frac{x-\frac{5}{2}}{1}=\frac{y+\frac{11}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{7}{4}}{1}$$

11. Hallar el ángulo agudo formado por los planos

$$3x+y-z+3=0 \text{ y } x-y+4z-9=0$$

Respuesta.

81° 50'

12. Determine la ecuación de un plano que pasa por el punto $(4,-2,1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos dados por

$$x-3y+4z-9=0 \text{ y } 2x+2y-z+11=0$$

Respuesta.

$5x-9y-8z-30=0$

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,3,0)$ y $(4,0,0)$ y que forma un ángulo de $30°$ con el plano $x+y+z=1$

Respuesta.

$5x+5y+(8\pm 3\sqrt{6})\,z-20=0$

14. Hallar el valor de k en la ecuación $kx-2y+6z+14=0$ para que la distancia del punto $(1,1,1)$ al plano sea igual a 3.

Respuesta.

3 y $\frac{3}{2}$

15. Hallar el valor de k para que la distancia desde el origen al plano cuya ecuación es $3x-6y+kz+14=0$ sea igual a 2.

Respuesta.

± 2

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z + 2 = 0$ y $x - 3y - z + 3 = 0$ y es perpendicular al plano XY.

Respuesta.

$x + 7y = 4$

17. Demostrar que los tres planos se intersecan en un solo punto común.
$3x + 2y - z - 3 = 0$, $2x - 3y - 3z - 4 = 0$ y $x + 7y - 2z + 7 = 0$

Respuesta.

$(2, -1, 1)$

18. Demuestre que la recta

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ x - y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

está contenida en el plano $x + 6y + 4z + 1 = 0$

20. Hallar el ángulo que forma la recta $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$ y el plano $2x + 3y - z + 11 = 0$

Respuesta.

4° 6'

21. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta $\begin{cases} 2x + 2y - z + 3 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ y el punto $(3, -1, 2)$.

Respuesta.

$3x + 5y - 4z + 4 = 0$

22. Determine la ecuación de la recta que pasa por P_0 y corta a las rectas

$R_1 : (\vec{r} - \vec{p}_1) \times \vec{m}_1 = \vec{0}$ y $R_2 : \vec{r} \times \vec{m}_2 = \vec{0}$

Respuesta.

$(\vec{r} - \vec{p}_0) \times [\vec{m}_1 \times (\vec{p}_1 - \vec{p}_0)] \times (\vec{p}_0 \times \vec{m}_2) = \vec{0}$