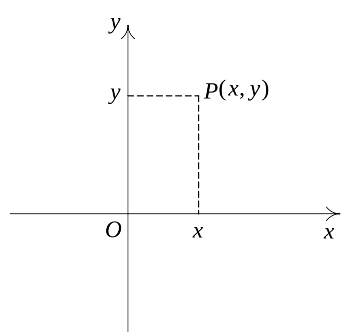
GEOMETRÍA VECTORIAL
(Continuación)
Cap. 3

El referencial $\mathbb{R}^2$

El sistema de referencia que denotaremos por $\mathbb{R}^2$ y que su definición se debe a René Decartes, consta de dos ejes que se cortan ortogonalmente en punto en común y cuyos elementos son números reales, estos dos ejes estan situados en el mismo plano, y ellos se acostumbran a llamar: eje de las abscisas (x) y eje de las ordenadas (y). Los puntos en éste sistema se representarán por pares ordenados tales como (x, y), siendo x el primer elemento del par perteneciente al eje x y que se acostumbra a llamar $abscisa$ e y el segundo elemento del par que pertenece al eje y y que se llama $ordenada$. El punto en común de intersección de ambos ejes es el punto $O(0,0)$ y se llama origen, así las $coordenadas$ de un punto cualquiera en este sistema de referencia estará dado por $P(x, y)$.

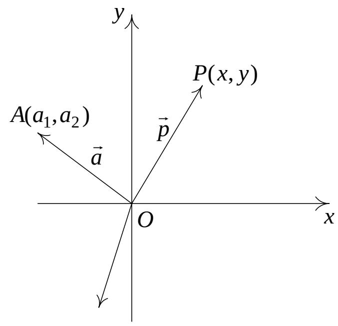


Notemos que las coordenadas de la proyección ortogonal del punto $P(x, y)$ sobre el eje x son $(x, 0)$, y las coordenadas de su proyección ortogonal en el eje y son $(0, y)$. Por simplificación en la notación nótese que el punto $(x, 0)$ en la fig. está denotada por x, analogamente para $(0, y)$ por y.

Vectores.

Un vector $\vec{p}$ en el sistema $\mathbb{R}^2$, lo representaremos por el par ordenado (x, y) es decir por la flecha cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es el punto P, como se muestra en la figura, así $\vec{OP} = \vec{p} = (x, y)$. A los números reales x e y también se acostumbran a llamar componentes del vector $\vec{p}$.

Todos los vectores en este sistema de referencia tienen en común su origen que es el punto $O(0,0)$.



Álgebra.

Antes de definir las diferentes operaciones que componen el álgebra de vectores, diremos que, no se contraponen a las definiciones dadas anteriormente, muy por el contrario respetan la geometría inherentes en ellas.

Igualdad

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, se define:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2$$

Suma

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, se define:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Ponderación

Dado el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y el escalar k, $k \in \mathbb{R}$, se define:

$$k\,\vec{u} = (ku_1, ku_2)$$

Nota

Las propiedades expuestas en el capítulo 1 con respecto a estas operaciones, también se cumplen integramente para estas nuevas definiciones.

Ejercicio 1.

Dados $\vec{a} = (4,3)$ y $\vec{b} = (-2,7)$, determine: i) El vector del punto medio del segmento AB. ii) Los escalares x e y tales que $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{c}$, donde $\vec{c} = (1,2)$

Solución.

i) De inmediato si M es el punto medio de AB entonces:

$$\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \Rightarrow \vec{m} = (1,5)$$

ii) $x(4,3) + y(-2,7) = (1,2) \Leftrightarrow 4x - 2y = 1 \;\wedge\; 3x + 7y = 2$ de donde

resolviendo se obtiene: $x = \dfrac{11}{34},\; y = \dfrac{5}{34}$

El producto escalar

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, se define:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Naturalmente las propiedades vistas para este producto, también se cumplen.

Norma.

Dado el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$, se define la norma o tamaño del vector $\vec{u}$ por: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Las propiedades de la norma se verifican sin dificultad.

Ejercicio 2

Dados $\vec{a} = (2, -1)$ y $\vec{b} = (3,7)$ determine : $\|\vec{a} + 3\vec{b}\|$, $proy_{\vec{b}}\vec{a}$, un vector unitario en la dirección de AB y el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución.

$$\|\vec{a} + 3\vec{b}\| = \|(11,20)\| = \sqrt{11^2 + 20^2} = \sqrt{521}$$

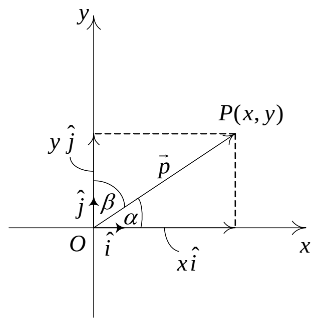
$$proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\,\vec{b} = -\frac{1}{58}(3,7)$$

$$\widehat{e} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{\|\vec{b} - \vec{a}\|} = \frac{(1,8)}{\sqrt{65}}$$

$$cos\, t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{58}} \Rightarrow t \approx 93{,}36°$$

Los vectores unitarios: $\widehat{\imath}$, $\widehat{\jmath}$

Se definen los vectores unitarios $\widehat{\imath} = (1,0)$ que es un vector unitario en la dirección positiva del eje X, $\widehat{\jmath} = (0,1)$ vector unitario en la dirección positiva del eje Y.



Cualquier vector en este sistema se puede expresar por medio de estos vectores unitarios, así:

$$\vec{p} = (x, y) = x\,(1,0) + y\,(0,1) = x\,\widehat{i} + y\,\widehat{j}$$

Observemos que $x\,\widehat{i}$ es un vector de longitud x en la dirección $\vec{OX}$, también $y\,\widehat{j}$ es un vector de longitud y en la dirección $\vec{OY}$.

Con respecto al producto escalar, se tiene:

$$\widehat{i} \cdot \widehat{i} = \widehat{j} \cdot \widehat{j} = 1, \quad \widehat{i} \cdot \widehat{j} = 0$$

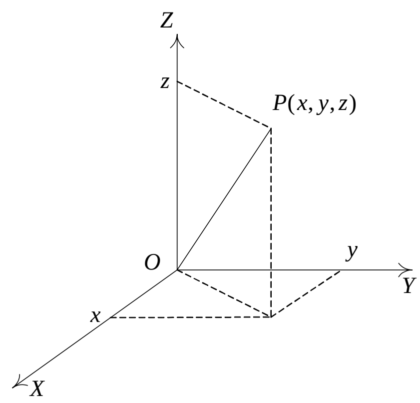
De la figura : $cos\,\alpha = \dfrac{x}{\|\vec{p}\|}$ y $cos\,\beta = \dfrac{y}{\|\vec{p}\|} \Rightarrow \quad cos^2\alpha + cos^2\beta = 1$

El referencial $\mathbb{R}^3$

El sistema de referencia que denotaremos por $\mathbb{R}^3$, consta de tres ejes que se cortan ortogonalmente en punto en común y cuyos elementos son números reales, estos tres ejes estan situados en un espacio, los que se acostumbran a llamar: eje de las abscisas (x), eje de las ordenadas (y) y eje de las cotas (z).

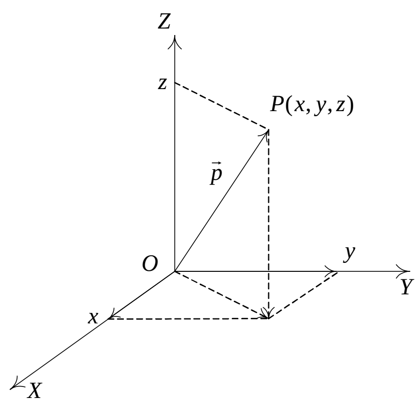
Los puntos en éste sistema se representarán por tríos ordenados tales como (x, y, z) siendo x el primer elemento del trío perteneciente al eje x y que se acostumbra a llamar $abscisa$, y el segundo elemento del trío que pertenece al eje y y que se llama $ordenada$ y z el tercer elemento, que pertenece al eje z y se denomina $cota$.

El punto en común de intersección de los tres ejes es el punto $O(0,0,0)$, que se llama origen, así las $coordenadas$ de un punto cualquiera en este sistema de referencia estará dado por $P(x, y, z)$.



Vectores

Analogamente al caso del referencial $\mathbb{R}^2$ el punto $P(x, y, z)$ también representa al vector $\vec{p} = \vec{OP} = (x, y, z)$, así:



Observación

Con respecto a la igualdad, suma, poderación y norma, las definiciones son análogas al caso de $\mathbb{R}^2$, así como todas sus propiedades, luego

Dados los vectores : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

1) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_i = v_i, \ \forall i = 1, 2, 3$

2) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3)$

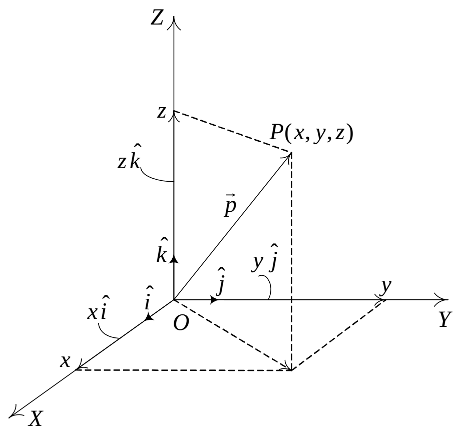
3) $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3), \forall k \in \mathbb{R}$

4) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

5) $\| \vec{u} \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Los vectores unitarios: $\boldsymbol{\widehat{i}}$, $\boldsymbol{\widehat{j}}$, $\boldsymbol{\widehat{k}}$

Se definen los vectores unitarios $\widehat{i} = (1,0,0)$ que es un vector unitario en la dirección positiva del eje X, $\widehat{j} = (0,1,0)$ vector unitario en la dirección positiva del eje Y, $\widehat{k} = (0,0,1)$ vector unitario en la dirección del eje Z.



Cualquier vector en este sistema se puede expresar por medio de estos vectores unitarios, así:

$$\vec{p} = (x, y, z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z(0,0,1) = x\,\widehat{i} + y\,\widehat{j} + z\,\widehat{k}$$

Observemos que $x\,\widehat{i}$ es un vector de longitud x en la dirección $\vec{OX}$, también $y\,\widehat{j}$ es un vector de longitud y en la dirección $\vec{OY}$ y que $z\widehat{k}$ es un vector de longitud z en la dirección $\vec{OZ}$.

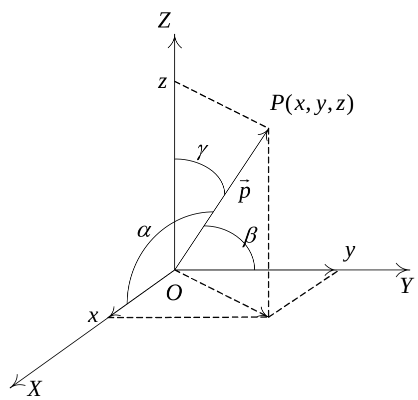
Con respecto a los productos escalar y vectorial, se tiene:

$$\widehat{i}\cdot\,\widehat{i} = \widehat{j}\cdot\widehat{j} = \widehat{k}\cdot\widehat{k} = 1,\ \ \widehat{i}\cdot\,\widehat{j} = \widehat{j}\cdot\widehat{k} = \widehat{k}\cdot\widehat{i} = 0$$

$$\widehat{i}\,\times\,\widehat{i} = \widehat{j}\times\widehat{j} = \widehat{k}\times\widehat{k} = \vec{0},\ \widehat{i}\times\widehat{j} = \widehat{k},\ \widehat{j}\times\widehat{k} = \widehat{i},\ \widehat{k}\times\widehat{i} = \widehat{j}$$

Cosenos directores.

Los cosenos directores de un vector $\vec{p}$ se definen como: $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$ y $cos\,\gamma$ donde α, β y γ son los ángulos formados entre el vector $\vec{p}$ y los ejes: X, Y y Z respectivamente, del sistema coordenado rectangular.



De la figura se tiene:

$$cos\,\alpha = \frac{x}{\|\vec{p}\|}\ ,\ cos\,\beta = \frac{y}{\|\vec{p}\|}\ \text{ y }\ cos\,\gamma = \frac{z}{\|\vec{p}\|}$$

de donde se deducen

$$\vec{p} = (x, y, z) = \|\vec{p}\|\,(cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma) \Rightarrow \widehat{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = (cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma)$$

en que $\widehat{e}$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{p}$.

También es fácil establecer que: $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

El producto vectorial

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\ \widehat{i} + u_2\ \widehat{j} + u_3\,\widehat{k}) \times (v_1\ \widehat{i} + v_2\ \widehat{j} + v_3\,\widehat{k}) \\
&= u_1v_2\ \widehat{i} \times \widehat{j} + u_1v_3\ \widehat{i} \times \widehat{k} + u_2v_1\ \widehat{j} \times \widehat{i} + \\
&\quad u_2v_3\ \widehat{j} \times \widehat{k} + u_3v_1\,\widehat{k} \times \widehat{i} + u_3v_2\,\widehat{k} \times \widehat{j} \\
&= u_1v_2\,\widehat{k} - u_1v_3\,\widehat{j} - u_2v_1\widehat{k} + u_2v_3\widehat{i} + u_3v_1\widehat{j} - u_3v_2\,\widehat{i} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\,\widehat{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\,\widehat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\widehat{k} \\
&= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\,\widehat{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\,\widehat{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\,\widehat{k}
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

El producto mixto o caja

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = [\,\vec{u}\,\vec{v}\vec{w}\,] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Demostración.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = (u_1\ \widehat{i} + u_2\ \widehat{j} + u_3\,\widehat{k}) \cdot (v_1\ \widehat{i} + v_2\ \widehat{j} + v_3\,\widehat{k}) \times (w_1\ \widehat{i} + w_2\ \widehat{j} + w_3\,\widehat{k})$$

$$= (u_1\ \widehat{i} + u_2\ \widehat{j} + u_3\,\widehat{k}) \cdot (\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\ \widehat{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\widehat{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\widehat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3

Dados los puntos $A = (4, 2, 1)$; $B = (6, 2, 1)$ y $C = \left(5, 2 + \sqrt{3}, 1\right)$

a) Demostrar que el triángulo ABC es equilátero

b) Determine el punto de intersección de las alturas.

c) Calcule su área.

Solución.

a) Por demostrar que : $||\vec{AB}|| = ||\vec{BC}|| = ||\vec{CA}||$

$||\vec{AB}|| = ||(2, 0, 0)|| = 2$

$||\vec{BC}|| = ||(-1, \sqrt{3}, 0)|| = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$

$||\vec{CA}|| = ||(-1, -\sqrt{3}, 0)|| = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$

b) Por ser equilátero, se tiene como pies de las alturas

$$\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = (5, 2, 1);\ \ \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = (\frac{11}{2}, \frac{1}{2}(4 + \sqrt{3}), 1)\ \text{ y}$$

$$\vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})=(\frac{9}{2},\frac{1}{2}(4+\sqrt{3}),1),\ \text{de donde:}$$

$$\vec{h}=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{r})=\frac{1}{3}(\vec{c}+2\vec{q})=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{p})=(5,2+\frac{1}{3}\sqrt{3},1)$$

c) De inmediato

$$Area=\frac{1}{2}\,||\vec{AB}||\,||\,\vec{CQ}\,||=\frac{1}{2}||(2,0,0)||\,||(0,\,-\sqrt{3},0)||=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$$

Ejercicio 4.

Dados $A=(2,-3,6)$ y $B=(1,8-4)$, $C=(1,2,2)$. Hallar: $\|\,\vec{a}\,\|$, $\|\,\vec{a}+\vec{c}\,\|$, $\widehat{e}_{\vec{AB}}$, $|\vec{a}\cdot\vec{b}\,|$, cosenos directores de $\vec{c}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$, $(\,\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Solución.

$$\|\,\vec{a}\,\|\;=\sqrt{4+9+36}=7,\quad \|\,\vec{a}+\vec{c}\,\|=\sqrt{9+1+64}=\sqrt{74}$$

$$\widehat{e}_{\vec{AB}}=\tfrac{1}{\sqrt{1+121+100}}(-1,11,-10)=\tfrac{1}{\sqrt{222}}(-1,11,-10).$$

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}\,|=|\,2-24-24\,|=46$$

Cosenos directores de $\vec{c}$: $cos\,\alpha=\frac{1}{3}$, $cos\,\beta=\frac{2}{3}$ y $cos\,\gamma=\frac{2}{3}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ 2 & -3 & 6\\ 1 & 8 & -4\end{vmatrix}=-36\,\widehat{i}+14\widehat{j}+19\,\widehat{k}$$

$$cos\,t=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\,\vec{a}\,\|\,\|\,\vec{b}\,\|}=-\frac{46}{7\cdot 9}\Rightarrow t\approx 136,9°$$

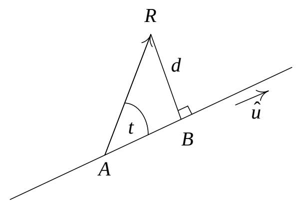
$$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\begin{vmatrix}2 & -3 & 6\\ 1 & 8 & -4\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 24-(-3)6+6(-6)=30$$

$$(\,\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(-36,14,19)\times(1,2,2)=(-10,81,86)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(2,-3,6)\times(24,-6,-6)=(54,156,60).$$

Distancia de un punto a una recta

No es necesario saber la ecuación de una recta.
Sea una recta dada por las puntos A y B, $A\neq B$, primero encontramos un vector unitario en la dirección de $\vec{AB}$, sea este $\widehat{u}$, entonces



De la figura $d = ||\vec{AR}||\, sen\, t$,

por otra parte $\| \widehat{u} \times \vec{AR} \| = \| \widehat{u} \| \| \vec{AR} \| \, sen\, t = \| \vec{AR} \| \, sen\, t$ por tanto

$$d = \| \widehat{u} \times \vec{AR} \|$$

En lugar del punto A también se puede tomar el punto B, o cualquier punto de la recta.

Ejercicio 5.

Determine la distancia desde el punto $R(2,\,-1,0)$ a la recta definida por los puntos $A(0,2,4)$ y $B(3,\,-3,5)$.

Solución.

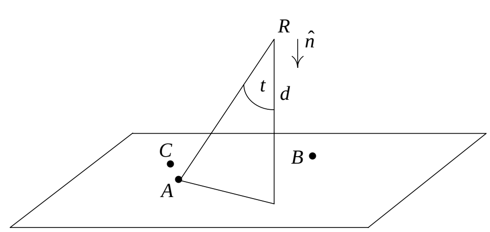
De inmediato $\widehat{u} = \frac{\vec{AB}}{\| \vec{AB} \|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3,\,-5,1)$, y $\vec{AR} = \vec{r} - \vec{a} = (2,\,-3,\,-4)$

$d = \| \frac{1}{\sqrt{35}}(3,\,-5,1) \times (2,\,-3,\,-4) \| = \frac{1}{\sqrt{35}} \| (23,14,1) \| = \sqrt{\frac{726}{35}}$

Distancia de un punto a un plano

Como en el caso anterior para calcular esta distancia no es necesario la ecuación del plano.

Sea el plano está dado por los puntos A, B y C (no colineales) y sabemos que un vector normal al plano esta dado por $\vec{AB} \times \vec{AC}$ y sea $\widehat{n}$ un vector unitario en esa dirección, entonces



De la figura $d = ||\vec{AR}||\, cos\, t$,

por otra parte $\| \widehat{u} \cdot \vec{AR} \| = \| \widehat{u} \| \| \vec{AR} \| \, cos\, t = \| \vec{AR} \| \, cos\, t$, por tanto

$$d = |\,\widehat{u}\cdot \vec{AR}\,|$$

En lugar del punto A también se puede tomar el punto B o C, o cualquier punto del plano.

Ejercicio 6

Sea el plano dado $A(1,0,2)$, $B(0,\,-1,2)$ y $C(4,1,3)$. Calcular la distancia al plano dado desde el punto $R(3,6,\,-2)$

Solución.

$$\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\,-1,1,2) \Rightarrow \widehat{n} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\,-1,1,2)$$

Así : $\quad d = \left|\,\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\,-1,1,2)\cdot(2,6,\,-4)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,|-4\,| = \dfrac{4}{\sqrt{6}}$

Ejercicios resueltos

1. Sean $A(0,2,4)$, $B(3,\,-1,2)$, $C(2,0,1)$ y $D(4,2,0)$ hallar un vector simultaneamente perpendicular al vector $\vec{AB}$ y al vector $\vec{CD}$

   Solución.

   Un vector en cuestión es $\vec{u} = \vec{AB}\times\vec{CD} = (\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{d}-\vec{c})$

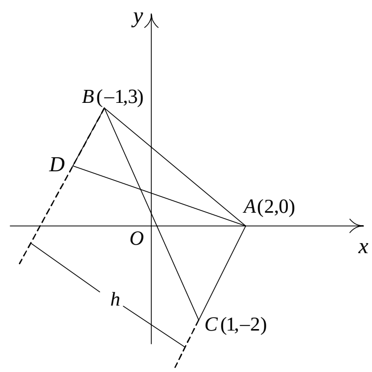
   $$= (3,\,-3,\,-2)\times(2,2-1)$$

   $$= \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\,\widehat{i} - \widehat{j} + 12\,\widehat{k}$$

2. En $\mathbb{R}^2$, se consideran los puntos: $A(2,0)$; $B(\,-1,3)$ y $C(1,\,-2)$, por B se traza $BD\,||\,AC$ determinándose el $\triangle ABD$ cuya área es la mitad de la del $\triangle ABC$. Probar que:

   $$\frac{2\vec{d}+\vec{a}}{3} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

   Prueba.



De la figura nótese que h es la altura común para ambos triángulos, luego

Por hipótesis:

$$\frac{1}{2}Area\,\triangle ABC = Area\,\triangle ABD \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\,h\,AC) = \frac{1}{2}\,h\,BD$$

de donde : $\frac{1}{2}\,\vec{AC} = \vec{BD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}) = (\vec{d}-\vec{b})$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{c}-\vec{a} = 2\,\vec{d} - 2\,\vec{b} \Leftrightarrow \frac{2\vec{d}+\vec{a}}{3} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

3. Demostrar que

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\widehat{i})\,\widehat{i} + \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\widehat{j})\,\widehat{j} + \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\widehat{k})\,\widehat{k}$$

Demostración.

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - b_1a_2)$$

por otra parte:

$$\vec{b}\times\widehat{i} = (0, b_3, -b_2) \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\widehat{i})\,\widehat{i} = (a_2b_3 - a_3b_2)\widehat{i}$$

analogamente

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\widehat{j})\,\widehat{j} = (b_1a_3 - a_1b_3)\,\widehat{j} \quad \text{y} \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\widehat{k})\,\widehat{k} = (a_1b_2 - b_1a_2)\widehat{k}$$

Sumando estas tres expresiones miembro a miembro se obtiene lo requerido.

4. Encontrar los valores de x, para los que $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$ siendo:

$$\vec{a} = (x-1, x^2-1, x^3-1)$$
$$\vec{b} = (2x-4, x^2-4, x^3-8)$$
$$\vec{c} = (3x-9, x^2-9, x^3-27)$$

Solución.

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 2 & x+2 & x^2+2x+4 \\ 3 & x+3 & x^2+3x+9 \end{vmatrix}$$

Haciendo $F_2 - F_1$ y $F_3 - F_2$ resulta:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 1 & 1 & x+3 \\ 1 & 1 & x+5 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & -x & -x^2+2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)(-2x)$$

Como $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(-2x) = 0,$ entonces:

$$x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 2 \vee \ x = 3$$

5. Sea $\vec{a} = (x, y, z)$ y $\vec{b} = (z, x, y)$ tales que $x + y + z = 0$

   a) Encuentre el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

   b) Demuestre que la $proy_{\vec{b}}\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$

   Solución.

   a) $cos\, t = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||} = \dfrac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2},$ pero

   $x + y + z = 0 \ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yx + 2zy = 0,$ entonces

   $$cos\, t = \frac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{xz + yx + zy}{2(xz + yx + zy)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3}$$

   b)

   $$proy_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\vec{b} = \frac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2}\ \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

6. Verifique que el Triángulo de vértices $P_1(2, 3, -4),$ $P_2(3, 1, 2)$ y $P_3(-3, 0, 4)$ es isósceles y luego calcule su área.

   Solución.

Calculando la longitud de sus lados se tiene:

$$P_1P_2 = ||\vec{p}_2 - \vec{p}_1|| = ||(1,\,-2,6)|| = \sqrt{41}$$
$$P_2P_3 = ||\vec{p}_3 - \vec{p}_2|| = ||(-6,\,-1,2)|| = \sqrt{41}$$

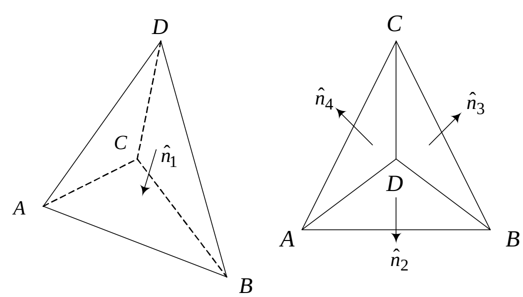
Por tanto es isósceles.

Area $= \dfrac{1}{2}\,||(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\times(\vec{p}_3 - \vec{p}_2)|| = \dfrac{1}{2}\,||(1,\,-2,6)\times(-6,\,-1,2)||$

$$= \frac{1}{2}||\begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix}|| = \frac{1}{2}\,||(2,\,-38,\,-11)|| = \frac{1}{2}\sqrt{1569}$$

7. Una cara de un poliedro, de área A, se dice que tiene el área vectorial $A\,\widehat{n}$ donde $\widehat{n}$ es un vector unitario normal a A y con dirección hacia afuera. Demostrar que las cuatro caras de un tetraedro $ABCD$ tienen áreas vectoriales tales que su suma es cero.

Solución.



Nótese que:

$$\widehat{n}_1 = \frac{\vec{AC}\times\vec{AB}}{\|\vec{AC}\times\vec{AB}\|} \text{ y el área de la cara } ABC \text{ es } \frac{1}{2}\|\vec{AC}\times\vec{AB}\|$$

así, $\quad A_1\,\widehat{n}_1 = \dfrac{1}{2}(\vec{AC}\times\vec{AB})$ es el área vectorial de la cara del $\triangle\, ABC$

analogamente:

$$A_2\,\widehat{n}_2 = \frac{1}{2}(\vec{DB}\times\vec{DC});\; A_3\,\widehat{n}_3 = \frac{1}{2}(\vec{DC}\times\vec{DA});\; A_4\,\widehat{n}_4 = \frac{1}{2}(\vec{DA}\times\vec{DB})$$

luego:

$$A_1\,\widehat{n}_1 + A_2\,\widehat{n}_2 + A_3\,\widehat{n}_3 + A_4\,\widehat{n}_4 = \frac{1}{2}\left\{(\vec{AC}\times\vec{AB}) + \cdot\cdot\cdot + (\vec{DA}\times\vec{DB})\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\vec{c}\times\vec{b} - \vec{c}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{d} - \vec{d}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} - \vec{c}\times\vec{d} - \vec{d}\times\vec{a}$$
$$+\,\vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{d} - \vec{d}\times\vec{b}\} = \tfrac{1}{2}\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

8. Considerar el tetraedro regular de vértices $O(0,0,0)$, $A(k,k,0)$, $B(k,0,k)$ y $C(0,k,k)$; $k > 0$.

a) Dibujar la gráfica del tetraedro

b) Hallar la longitud de cada arista.

c) Hallar el área de cada cara

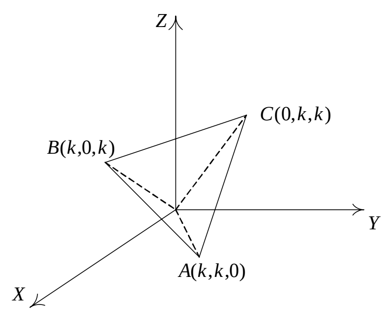
d) Hallar su volumen

e) Hallar el ángulo entre cada par de aristas.

f) Hallar el ángulo entre las rectas trzadas desde el centroide $G(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ a dos de los vértices.

g) Demuestre que si dos pares de aristas opuestas son perpendiculares, las del tercer par también son perpendiculares.

Solución.



b) $l = OA = OB = OC = BC = AC = AB = \| \vec{b} - \vec{a} \| = \| (0, -k, k) \|$

luego $l = \sqrt{2}\, k$

c) Area $= A = \frac{1}{2} \| \vec{OA} \times \vec{OB} \| = \frac{1}{2} \| \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} \| = \frac{1}{2} \| (k^2, -k^2, -k^2) \|$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{3k^4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, k^2$$

d) Volumen $= V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, k^2 \cdot h$, donde h es la distancia desde el origen al plano dado por los puntos A, B, C; que es

$$h = |\widehat{u} \cdot \vec{OA}|, \text{ donde } \widehat{u} = \frac{\vec{AC} \times \vec{AB}}{\| \vec{AC} \times \vec{AB} \|} = \frac{(k^2, k^2, k^2)}{\sqrt{3}\, k^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} |(1,1,1) \cdot (k,k,0)| = \frac{2k}{\sqrt{3}}$$

Así: $V = \frac{1}{3} k^3$

e) $cos\, t = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \, \|\vec{OB}\|} = \frac{k^2}{\sqrt{2k^2}\sqrt{2k^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 60°$

f) $cos\, \theta = \dfrac{\vec{GA} \cdot \vec{GB}}{\|\vec{GA}\| \, \|\vec{GB}\|} = \dfrac{(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}) \cdot (\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, \frac{k}{2})}{\frac{3}{4}k^2} = -\dfrac{\frac{1}{4}k^2}{\frac{3}{4}k^2} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\theta = cos^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 109,47°$

g) Por demostrar, si

$$(\vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0 \;\; \wedge \;\; \vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0) \Rightarrow \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$$

En efecto:

$$\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Restando miembro a miembro

$$\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$$

Ejercicios propuestos

1. Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = (1,2,-3)$ y $\vec{b} = (-3,1,2)$

   Respuesta. $\dfrac{2\pi}{3}$

2. Verifique que el triángulo con vértices $A(2,3,-4)$, $B(3,1,2)$ y $C(7,0,1)$ es un triángulo rectágulo, calcule su área.

   Respuesta. $\dfrac{1}{2}\sqrt{738}$

3. Determine a, b, c no todos nulos, de modo que $\vec{v} = (a,b,c)$ sea ortogonal a los dos vectores $\vec{u} = (1,2,1)$ y $\vec{w} = (1,-1,1)$

   Respuesta. $a = -t,\ b = 0,\ c = t,\ t \in \mathbb{R}$ (parámetro)

4. Determine el volumen el paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y lados

$\vec{u} = \widehat{i} - 2\widehat{j} + 4\widehat{k},\ \vec{v} = 3\widehat{i} + 4\widehat{j} + \widehat{k}$ y $\vec{w} = -\widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}$

Respuesta. 39

5. Sean $\vec{a} = (1,2,1),\ \vec{b} = (2,0,-1),\ \vec{c} = (0,-1,2)$. Calcular: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$ y $(\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b})$.

   Respuesta. $-11,\ (0,1,-2), (2,4,2),\ (-22,0,11)$ y $(4,-6,8)$

6. Dados los puntos $A(3,2,1),\ B(2,3,-1),\ C(-1,2,3)$, encontrar

   a) El área del triángulo ABC;

   b) La distancia d desde el origen al plano dado por los puntos A, B, C;

   c) El volumen del tetraedro $OABC$;

   d) El volumen del paralelepípedo cuyas aristas son OA, OB, OC.

   Respuesta. a) $\sqrt{30}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{30}$; c) 5; d) 30.

7. En un triángulo ABC de lados a, b, c, el punto R divide a BC en le razón $\dfrac{\lambda}{1}$

   Demostrar que

$$(AR)^2 = \frac{c^2 + \lambda b^2}{1 + \lambda} - \frac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}$$

8. Dados $\vec{u} = (1,2,3),\ \vec{v} = (2,-3,1),\ \vec{w} = (3,2,-1)$ y $\vec{q} = (6,14,-1)$

   a) Determine las componentes del vector $\vec{x}$, que verifica la ecuación

$$2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7(\vec{x} + \frac{1}{7}\vec{w})$$

   b) Encuentre x_1, x_2, x_3 tales que

$$x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w} = \vec{q}$$

9. Sean $P(2,3,-2)$ y $Q(7,-4,1)$

   a) Encuentre el punto medio del segmento PQ.

   b) Encuentre los puntos que trisecan al segmento PQ.

10. Sean $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P(x,y,z)$. Describa el conjunto de puntos (x,y,z) para los cuales $\| \overrightarrow{P_0P} \| = 1$.

11. Utilice vectores para encontrar los ángulos interiores del triángulo con vértices $A(-1,0),\ B(-2,1)$ y $C(1,4)$.

12. Hallar un vector unitario que forma un ángulo de 45° con el vector $(2,2,-1)$

y un ángulo de $60°$ con $(0,1,-1)$

Respuesta. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ o $\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,4,1)$

13. Hallar k de modo que los vectores

$$\vec{u}=(1,1,-1),\ \vec{v}=(2,-1,1),\ \vec{w}=(k,-1,k)$$

sean coplanares.

14. Dados los puntos: $A(1,2,-1)$, $B(0,3,2)$, $C(1,5,0)$ y $D(p,2,k)$

a) Determine p y k de modo que $\vec{AB}$ sea paralelo con $\vec{CD}$.

b) Encuentre la distancia entre los segmentos paralelos AB y CD.

Respuesta. a) $p=4,\ k=-9$ b) $\sqrt{\frac{74}{11}}$

15. Demostrar que en un tetraedro de vértices A,B,C y D su volumen viene dado por $\dfrac{1}{6}[(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})(\vec{d}-\vec{a})]$

16 Hallar el valor de k para que la distancia desde el origen al plano dado por los puntos $A(2,3,5)$, $B(6,2,4)$ y $C(1,k,3)$ sea 2.

17 Demostrar la desigualdad de $Schwarz$:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

siendo válido el signo igual sólo cuando $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

18. Si r es el radio de una esfera circunscrita en un tetraedro regular de lado a, demostrar que $r^2=\dfrac{3}{8}a^2$.

19. Los puntos A',B',C' dividen los lados BC,CA,AB del triángulo ABC en la razón $\dfrac{1}{2}$. Los pares de rectas $(AA',BB'),(BB',CC'),(CC',AA')$ se intersectan en P,Q,R, respectivamente. Demostrar que el área del triángulo PQR es $\frac{1}{7}$ del área de ABC.

20. Hallar la norma y los cosenos directores de la suma de los vectores $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$ donde $A(-1,2,-1)$, $B(-3,6,6)$, $C(4,3,1)$, $D(0,0,2)$

21. Hallar la distancia del punto $(1,2,2)$ a la recta que oasa por $(2,2,3)$ y $(2,-1,0)$

22. Dados los vértices de un tetraedro

$$A(5,3,1),\ B(0,0,0),\ C(3,1,6) \text{ y } D(-2,4,-1)$$

a) Hallar su volumen,

b) Hallar las coordenadas de E que es el punto en que la altura trazada desde D corta corta a la base ABC.