GEOMETRÍA VECTORIAL

Capítulo 2

(Continuación)

Vectores unitarios

Se dice que un vector es unitario si y solo si su magnitud o norma es 1.

Un vector unitario, aunque no en exclusiva se acostumbran a denotar por $\widehat{e}$.

Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ entonces $\dfrac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}$ es un vector unitario, y además en la dirección y sentido de $\vec{a}$, note que $\vec{a} = ||\vec{a}||\,\widehat{a}$.

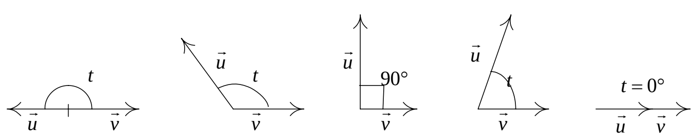
Producto punto

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores, se define el producto punto o también llamado producto escalar, por

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}||\,cos\,t, \text{ siendo } t \text{ el ángulo que forman } \vec{u} \text{ y } \vec{v}$$

Discusión:

Como $||\vec{u}||$ y $||\vec{v}||$ son siempre positivos para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ distintos de $\vec{0}$, entonces $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y el $cos\,t$ tendrán el mismo signo, en las figuras siguientes están representados los todos los casos posibles



$t = \pi$	$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$t = \frac{\pi}{2}$	$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$t = 0°$
$cos\,t = -1$	$cos\,t < 0$	$cos\,t = 0$	$cos\,t > 0$	$cos\,t = 1$
dirección opuesta	$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$	$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$	misma dirección

Propiedades 1:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0,\ \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \ \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Norma de un vector

Vamos a definir la norma o magnitud del vector $\vec{u}$, por

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Propiedades 2:

1. $\| \vec{u} \| \geq 0;\ \| \vec{u} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
2. $\| k\vec{u} \| = |k| \, \| \vec{u} \|$
3. $\| \vec{u} \|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
4. $| \vec{u} \cdot \vec{v} \, | \leq \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \|$
5. $\| \vec{u} + \vec{v} \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$

Ángulo entre dos vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos, el ángulo t entre ellos se calcula mediante

$$cos\, t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\,\|},\ 0 \leq t \leq \pi$$

Note que el ángulo entre el vector cero y otro vector no esta definido por ésta relación.

Ejercicio 1.

Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ con $\| \vec{a} \| = 3$, $\| \vec{b} \| = 5$ y $\| \vec{c} \| = 7$. Calcule el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución.

Efectuando $\vec{a} \cdot , \vec{b} \cdot$ y $\vec{c} \cdot$ sucesivamente sobre $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ resultan

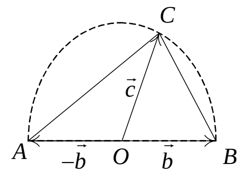
$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \ -9$$
$$\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \ -25$$
$$\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \ -49$$

Resolviendo éste sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, para $\vec{a} \cdot \vec{b}$ se tiene

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15}{2} \ \Rightarrow cos\, t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\| \vec{a} \| \| \vec{b} \|} = \frac{15}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

Ejercicio 2.

Demuestre que el triángulo inscrito en una semi circunferencia es rectángulo.



Demostración.

Se sabe que: $\|\vec{b}\| = \|-\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = r$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OA} = -\vec{b}$

por demostrar que $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$, en efecto de la figura se tiene

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = [\vec{c} - (-\vec{b})] \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c} = \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{c}\|^2 = r^2 - r^2 = 0$$

Ortogonalidad

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales entre sí, si el ángulo entre ellos es de $90°$

Como el vector $\vec{0}$ tiene dirección arbitraria, se considera ortogonal a cualquier vector $\vec{a}$ por tanto es ortogonal a $\vec{0}$.

Propiedad 3.

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son mutuamente ortogonales si y solo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\forall \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$

Demostración.

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{a}||||\vec{b}||\, cos\, t = 0 \Leftrightarrow cos\, t = 0$, pues $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow t = 90°$

ahora si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales entonces $t = 90° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Propiedad 4.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores arbitrarios, entonces

$$|\, \vec{a} \cdot \vec{b}\, | \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$$

Demostración.

Si $\vec{a} \vee \vec{b} = \vec{0}$ se verifica la igualdad, por tanto sean $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$, luego

$$||x\vec{a} + \vec{b}||^2 = (x\vec{a} + \vec{b}) \cdot (x\vec{a} + \vec{b}) = ||\vec{a}||^2 x^2 + 2\, \vec{a} \cdot \vec{b}\, x + ||\vec{b}||^2 \geq 0$$

Para que este trinomio de segundo grado sea siempre positivo o cero y dado que $||\vec{a}||^2 > 0$ entonces se debe tener que $\Delta \leq 0$, de aquí que

$$(2\, \vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 4\, ||\vec{a}||^2 ||\vec{b}||^2 \leq 0 \Leftrightarrow |\, \vec{a} \cdot \vec{b}\, | \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$$

Observación.

También es válido el siguiente argumento,

$$|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,| = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||\,|\,cos\,t\,| \leq ||\vec{a}||||\vec{b}||$$, pués es sabido que $|\,cos\,t\,| \leq 1$

Notemos que el signo igual se cumple para $cos\,t = \pm 1$ y esto es para $t = 0$, $t = \pi$ o bien $\vec{a}||\vec{b}$.

Propiedad 5.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores arbitrarios, entonces

$$||\vec{a}+\vec{b}\,|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$$

Demostración.

$||\vec{a}+\vec{b}\,||^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = ||\vec{a}||^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2$, pero por la proiedad anterior $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$ entonces se deduce,

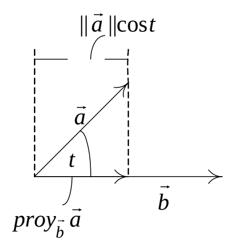
$$||\vec{a}+\vec{b}\,||^2 \leq ||\vec{a}||^2 + 2||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| + ||\vec{b}||^2 \Rightarrow ||\vec{a}+\vec{b}\,|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$$

Proyección ortogonal.

La proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ la denotaremos por $proy_{\vec{b}}\,\vec{a}$, entonces

$$proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b}, \quad \vec{a},\vec{b} \neq 0$$

Demostración.



De la figura, $proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = ||\vec{a}||\,cos\,t\,\widehat{e}$, donde $\widehat{e}$ es un vector unitario en el sentido y dirección de $\vec{b}$, es decir $\widehat{e} = \dfrac{1}{||\vec{b}||}\,\vec{b}$

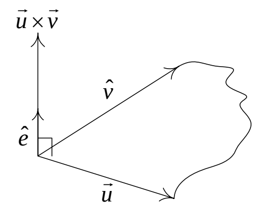
por tanto $proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = ||\vec{a}||\,\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||}\,\dfrac{1}{||\vec{b}||}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b}$.

Producto cruz.

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores, se define el producto cruz o también llamado producto vectorial, por

$\vec{u}\times\vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}||\,sen\,t\ \widehat{e}$, siendo t el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\widehat{e}$ es un vector unitario perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $0 \leq t \leq \pi$

De inmediato entonces $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} = 0.$



Note que: $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = ||\vec{u}||||\vec{v}||\, sen\, t$

Observe también que que no tenemos que escribir $|\, sen\, t\,|$, pues $sen\, t \geq 0$ para $0 \leq t \leq \pi$

Propiedades 6.

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2. $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{0}$

Propiedad 7.

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ paralelos si y solo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Demostración.

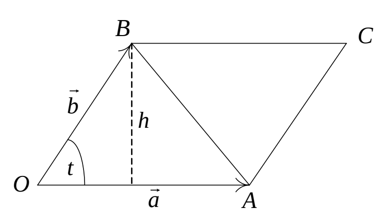
Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entonces $\vec{a} = k\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = k(\vec{b} \times \vec{b}) = \vec{0}$

Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ entonces $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = 0 \Rightarrow \| \vec{a} \| \| \vec{b} \|\, sen\, t = 0 \Leftrightarrow sen\, t = 0$, con lo que $t = 0$ o $t = 180°$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

Área de un paralelógramo y de un triángulo

El área de un paralelógramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dada por: $\| \vec{a} \times \vec{b} \|$

El área de un triángulo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dada por: $\dfrac{1}{2} \| \vec{a} \times \vec{b} \|$



Demostración.

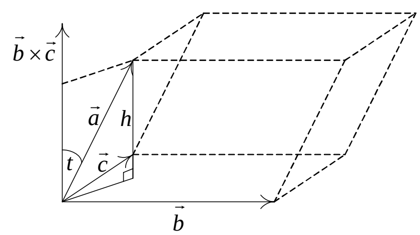
Sea el paralelógramo $OACB$ entonces,

$$\text{Área} = \| \vec{a} \| \, h = \| \vec{a} \| \, \| \vec{b} \| \, sen\, t = \| \vec{a} \times \vec{b} \|$$

para el triángulo OAB, es inmediato que su área es la mitad de la del paralelógramo.

Triple producto escalar

El triple producto escalar de tres vectores se acostumbra a denotar por $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ cuyo resultado es un escalar. Geométricamente es igual al volumen del paralelepípedo de lados $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Volumen del paralelepípedo $= V =$ área de la base $\times\, h = \| \vec{b} \times \vec{c} \| \, h$ pero $h = \| \vec{a} \| \, cos\, t$, entonces $V = \| \vec{b} \times \vec{c} \| \, \| \vec{a} \| \, cos\, t = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ como bien éste resultado puede ser positivo o negativo, por tanto si se trata de calcular el volumen del paralelepípedo habrá que considerar el módulo.

Nótese que:

Si $0 < t < 90° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} > 0$,

Si $90° < t < 180° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} < 0$.

Propiedades 8.

1. $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ coplanares si y solo si $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$
2. Si dos vectores cualquiera de un triple producto escalar son iguales, entonces ese producto es 0.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

Notación.

La propiedad 3 de las propiedades 8, muestra que en un triple producto escalar, el punto y la cruz pueden intercambiarse sin variar su valor, se acostumbra a denotar este producto por $[\, \vec{a} \vec{b}\, \vec{c}\,]$.

Ejercicio 3.

Usando el triple producto escalar , demostrar que

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

Demostración.

Sea $\vec{u}=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ el producto escalar de $\vec{u}$ con un vector arbitrario $\vec{v}$, resulta:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\vec{v}\cdot\vec{a}\times\vec{b}-\vec{v}\cdot\vec{a}\times c$$

$$=\vec{v}\times\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})-\vec{v}\times\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{v}\times\vec{a}\cdot c=0$$

Así, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, como $\vec{v}$ es arbitrario se puede elegir $\vec{v}=\vec{u}$ de modo que si $\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow\vec{u}=\vec{0}$, luego

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

Triple producto vectorial.

Al vector $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ o bien $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ se llama triple producto vectorial, nótese que $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

Propiedad 9.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}$$

Propiedad 10.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

Demostración.

Note que $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\cdot\vec{d}=[\,(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}]\cdot\vec{d}$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

Propiedad 11.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}=[\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}$$

Demostración.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}]\vec{c}-[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]\vec{d}=[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

y también

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [(\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{a}]\vec{b} - [(\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{b}]\vec{a} = [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}$$

Ejercicio 4.

Demuestre que cualquier vector $\vec{r}$ en el espacio, puede expresarse como una combinación lineal de tres vectores cualquiera no coplanares, $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Demostración.

Primera forma:

Por la propiedad 11, siendo $\vec{r}=\vec{d}$ se tiene

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{r}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{r} = [\vec{a}\vec{c}\vec{r}]\vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{r}]\vec{a}$$

Como $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son no coplanares, entonces $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\neq 0$ y por tanto

$$\vec{r} = \frac{[\vec{r}\vec{b}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}\vec{a} + \frac{[\vec{a}\vec{r}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}\vec{b} + \frac{[\vec{a}\vec{b}\vec{r}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}\vec{c}$$

expresión que nos dice que $\vec{r}$ está en combinación lineal de los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Segunda forma:

De inmediato $\vec{r} = m\,\vec{a} + p\,\vec{b} + q\,\vec{c}\,/\ \cdot(\vec{b}\times\vec{c}) \Rightarrow [\vec{r}\vec{b}\vec{c}] = k[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$, como

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\neq 0 \Rightarrow m = \dfrac{[\vec{r}\vec{b}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$, analogamente $\vec{p} = \dfrac{[\vec{a}\vec{r}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$ y $q = \dfrac{[\vec{a}\vec{b}\vec{r}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$

Ejercicios Resueltos

1. Demuestre que todo vector $\vec{a}$ se puede expresar como la suma de su proyección ortogonal sobre un vector $\vec{b}$ y otro vector que es ortogonal con $\vec{b}$. $\vec{a}$ no paralelo a $\vec{b}$.

   Demostración.

   Es claro que $\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b} + (\vec{a} - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b})$, siendo $proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b}$, y nótese que $(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||^2}\vec{b})\cdot\vec{b} = 0,$ por tanto este otro vector es ortogonal a $\vec{b}$.

2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios y t el ángulo entre ellos, demuestre que

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 2\left|sen\frac{t}{2}\right|$$

Demostración.

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2a\cdot b + b^2 = 2 - 2a\cdot b$$

$$= \quad 2(1 - \|a\|\|b\| \ cost) \quad = 2(1 - cost) = 4sen^2\tfrac{t}{2}, \Rightarrow$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 2|sen\tfrac{t}{2}|$$

3. Si $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son tres vectores coplanares, demostrar que $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ también lo son.

Demostración.

Si $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son tres vectores coplanares, entonces $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$ por demostrar que

$[\vec{a}\times\vec{b}\ \vec{b}\times\vec{c}\ \vec{c}\times\vec{a}] = 0,$ en efecto :

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\ \vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = \ \{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\,\vec{b} - [\vec{a}\vec{b}\vec{b}]\,\vec{c}\}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = 0$

4. a) Demostrar que $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$

b) Resolver $(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{x}\times\vec{a}) = \ \vec{a}\times\vec{b}$

Solución.

a) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[(\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a})\,\vec{c} - (\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c})\,\vec{a}\,\right]$

$= (\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a})\,(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}),$ pués $\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c} = 0$

$= (\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c})\,(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$

b) $(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{x}\times\vec{a}) = \ \vec{a}\times\vec{b}\ \ /\ \cdot\vec{a}\ \Rightarrow$

$(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ como $\vec{a}\cdot\vec{a} \neq 0 \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{a} = 0 \qquad (1)$

Por otra parte $(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{x}\times\vec{a}) = \ \vec{a}\times\vec{b}\ \ /\ \times\vec{a}\ \Rightarrow$

$(\vec{x}\times\vec{a})\times\vec{a} = \ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} \Leftrightarrow \quad (\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{x} = (\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{||\vec{a}||^2}(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a} - \vec{b},\ \ \vec{a} \neq \vec{0}$$

5. Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, demuestre que: $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=3\,\vec{a}\times\vec{b}$

Demostración.

De $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\ \wedge\ \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}) \Rightarrow$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}$$

Sumando miembro a miembro estas tres expresiones resulta:

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=3\,\vec{a}\times\vec{b}$$

6. Demuestre que el ángulo que forman las proyecciones: $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ y $proy_{\vec{u}}\vec{v}$ es el mismo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Solución.

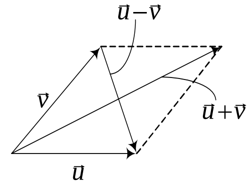
$$cos\,t = \frac{\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\cdot\dfrac{(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}}{||\vec{u}||^2}}{\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{||\vec{v}||\,||\vec{u}||}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||},$$ y esta expresión es igual al coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

7. Demuestre que si : $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales entre si, entonces $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$, interprete geometricamente este resultado.

Demostración.

$\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ ortogonales entre si, entonces: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$

$\vec{u}.\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow ||\vec{u}||^2 = ||\vec{v}||^2 \Leftrightarrow ||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$



$\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son las diagonales de un rombo

9. Demuestre que los puntos A, B, C y D son coplanares, si:

$$[\vec{d}\vec{b}\vec{c}] + [\vec{a}\vec{d}\vec{c}] + [\vec{a}\vec{b}\vec{d}] - [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] \;=\; 0$$

Demostración.

Por la propiedad 11, $[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d} = [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}$ es decir

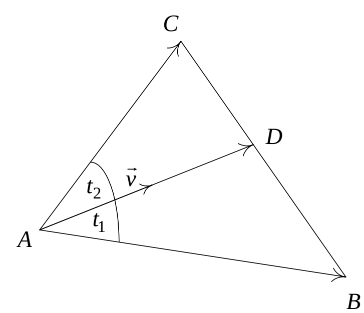
$[\vec{d}\vec{b}\vec{c}]\vec{a} + [\vec{a}\vec{d}\vec{c}]\vec{b} + [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\vec{d} \;=\; \vec{0}$ y la condición de coplanares implica que: $[\vec{d}\vec{b}\vec{c}] + [\vec{a}\vec{d}\vec{c}] + [\vec{a}\vec{b}\vec{d}] - [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] \;=\; 0$

10. Dado un triángulo ABC, sean $b = ||\vec{AC}||$ y $c = ||\vec{AB}||$. Probar que el vector:

$$\vec{v} = \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{b+c}$$

es el que da la dirección de la bisectriz del ángulo BAC.

Prueba.



Sea la bisectriz AD, vamos a demostrar que $t_1 = t_2$ o bien que $cos\, t_1 = cos\, t_2$

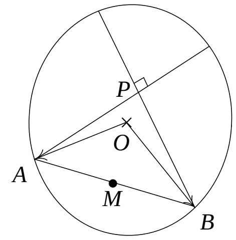
$$cos\, t_1 = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{v}}{||\vec{AB}||\;||\vec{v}||} = \frac{\vec{AB}\cdot\frac{b\vec{AB}+c\vec{AC}}{b+c}}{c\,||\vec{v}||} = \frac{bc^2 + c\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{c(b+c)\,||\vec{v}||} = \frac{bc + \vec{AB}\cdot\vec{AC}}{(b+c)\,||\vec{v}||}$$

Analogamente

$$cos\, t_2 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{AC}}{||\vec{v}||\;||\vec{AC}||} = \frac{\frac{b\vec{AB}+c\vec{AC}}{b+c}\cdot\vec{AC}}{||\vec{v}||\, b} = \frac{b\vec{AB}\cdot AC + cb^2}{|\vec{v}||(b+c)\, b} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC} + cb}{||\vec{v}||\,(b+c)}$$

Por tanto $cos\, t_1 = cos\, t_2$.

11. Por un punto interior a un círculo dado se trazan dos semi-rectas perpendiculares entre si. Sean A y B los puntos en que ellas cortan a la circunferencia. Hallar vectorialmente el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas AB.



Solución.

Sea O el origen, se tiene que :

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{p}) \cdot (\vec{b} - \vec{p}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{p} \cdot \vec{p} = 0$$

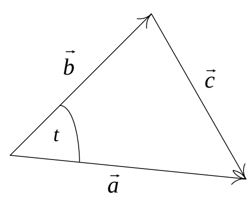
pero: $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}[(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2)]$ y como $\vec{m} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\vec{m}^2 - r^2, \text{ siendo } \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = r^2 = \vec{b}^2, \; r \text{ radio}$$

luego $\quad 2\vec{m}^2 - r^2 - \vec{p} \cdot 2\vec{m} + \vec{p}^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{m} - \dfrac{1}{2}\vec{p})^2 = \dfrac{1}{4}(2r^2 - \vec{p}^2)$

lo que representa a una circunferencia, de centro $\dfrac{1}{2}\vec{p}$ y radio $\dfrac{1}{2}\sqrt{2r^2 - \vec{p}^2}$

12. Demostrar el teorema del coseno aprovechando el producto punto.

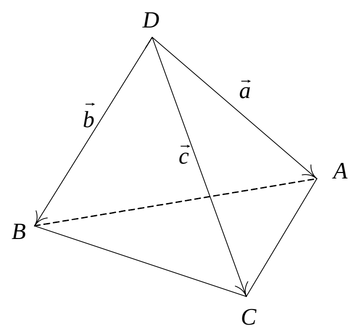


Demostrar.

De la figura $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow$

$$\| \vec{c} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 - 2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos \, t \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, cos \, t$$

13. Demostrar que si en un tetraedro dos pares de aristas opuestas son perpendiculares, las del tercer par son también perpendiculares, y la suma de los cuadrados de dos aristas opuestas es la misma para cada par.



Demostrar.

Sea D el origen, entonces : $\vec{DA} = \vec{a},\ \vec{DB} = \vec{b},\ \vec{DC} = \vec{c}$

Por hipótesis : $\vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} \qquad (1)$

$$\vec{DA} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \qquad (2)$$

$(2)\ - (1) \Rightarrow \qquad \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{DB} \cdot \vec{CA} = 0$

La suma de los cuadrados de : $\vec{DB}$ y $\vec{CA}$, $\vec{DC}$ y $\vec{AB}$ y $\vec{DA}$ y $\vec{BC}$

$$\vec{b}^2 + (\vec{a} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - 2\,\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{c}^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - 2\,\vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - 2\,\vec{c} \cdot \vec{b}$$

estas tres expresiones son iguales, pues $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b}$.

14. Demostrar que:

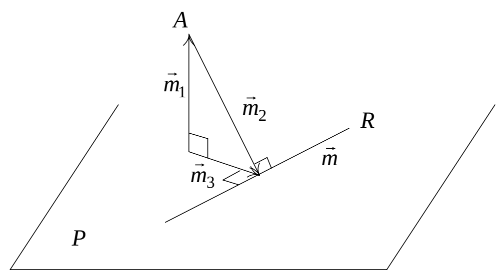
$$\|\, \vec{a} \times \vec{b} \,\|^2 = \|\, \vec{a} \,\|^2 \,\|\, \vec{b} \,\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Demostración.

$$\|\, \vec{a} \times \vec{b} \,\|^2 = \|\, \vec{a} \,\|^2 \,\|\, \vec{b} \,\|^2\, sen^2 t = \|\, \vec{a} \,\|^2 \,\|\, \vec{b} \,\|^2\, (1 - cos^2 t)$$
$$= \|\, \vec{a} \,\|^2 \,\|\, \vec{b} \,\|^2 - \|\, \vec{a} \,\|^2 \,\|\, \vec{b} \,\|^2 cos^2 t = \|\, \vec{a} \,\|^2 \,\|\, \vec{b} \,\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

15. Si desde un punto A de una recta perpendicular a un plano P, se baja la perpendicular a una recta R del plano P. Demostrar que la recta determinada por los pies de las perpendiculares, es perpendicular a la recta L.

Demostración.



Por hipótesis:

$$\vec{m}\cdot\vec{m}_2 = 0 \ \wedge \ \vec{m}\cdot\vec{m}_1 = 0$$

De la figura: $\vec{m}_2 = \vec{m}_3 - \vec{m}_1 \,/\vec{m}\,\cdot \ \Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{m}_2 = \vec{m}\cdot\vec{m}_3 - \vec{m}\cdot\vec{m}_1 \Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{m}_3 = 0$

16. Demostrar que

Si $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{d}$ y $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d}$ entonces $\vec{a}-\vec{d}$ es paralelo a $\vec{b}-\vec{c}$.

Demostración.

Si $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{d}$ y $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d} \ \Rightarrow \ \vec{a}\times\vec{b} - \ \vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{d} - \vec{b}\times\vec{d}$

$\vec{a}\times\vec{b} - \ \vec{a}\times\vec{c} = \vec{d}\times\vec{b} - \vec{d}\times\vec{c} \Leftrightarrow \ \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{d}\times(\vec{b}-\vec{c}) \Leftrightarrow$

$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \ \vec{a}-\vec{d}$ es paralelo a $\vec{b}-\vec{c}$.

17. Demostrar

$$(\,\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = \vec{0}$$

Demostración.

$$(\,\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\,\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\cdot\vec{d} = \{(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}\}\cdot\vec{d}$$

$$= (\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{c}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{d}) \qquad (1)$$

analogamente

$$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d}) - (\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{d}) \qquad (2)$$

$$(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{d}) - (\vec{c}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) se obtiene

$$(\,\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = \vec{0}$$

18. Demostrar

$$(\,\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d}) = \ -2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

Demostración.

$$(\,\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{a} \times \vec{d}) = [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$
$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{b} \times \vec{d}) = [\vec{c}\vec{a}\vec{d}]\vec{b} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

sumando estas tres expresiones se obtiene:

$$= [\vec{d}\vec{b}\vec{c}]\vec{a} + [\vec{a}\vec{d}\vec{c}]\vec{b} + [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - 3[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

y por propiedad 11. se tiene que

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d} = [\vec{d}\vec{b}\vec{c}]\vec{a} + [\vec{a}\vec{d}\vec{c}]\vec{b} + [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}$$

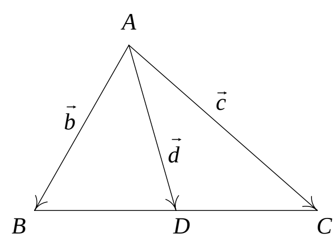
entonces

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{b} \times \vec{d}) = -2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

19. En un triángulo ABC, si AD es la mediana del lado BC. Demostrar que

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Demostración.



Considerando A como el origen, se tiene:

$$\vec{AD} = \vec{d} = \tfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \ \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \ \vec{AB} = \vec{b} \ \text{ y } \ \vec{AC} = \vec{c}$$

entonces,

$$2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$
$$= \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = AB^2 + AC^2$$

20. Resolver:

a) $\alpha\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{a} = \vec{b}$, $\alpha + \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, $\alpha \neq 0$

b) $[\vec{a}\vec{b}\vec{x}]\vec{c} + \vec{x} \times \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son no coplanares.

Solución.

a) $\alpha\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{a} = \vec{b} \ \ / \cdot \vec{b} \Rightarrow \alpha(\vec{x} \cdot \vec{b}) + (\vec{x} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = b^2 \Rightarrow$

$(\vec{x} \cdot \vec{b}) = \dfrac{b^2}{\alpha + \vec{a} \cdot \vec{b}}$, así $\vec{x} = \dfrac{1}{\alpha}[\vec{b} - \dfrac{b^2}{\alpha + \vec{a} \cdot \vec{b}}\,\vec{a}\,]$

b) Por una parte,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{x}\times\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{x} - [\vec{a}\vec{b}\vec{x}]\vec{c} \Rightarrow$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{x}]\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{x} - (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{x}\times\vec{c}) \qquad (1)$$

por otro lado

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{x}]\vec{c}\cdot\vec{c} + \vec{x}\times\vec{c}\cdot\vec{c} + \vec{d}\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{x}] = -\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{c^2},$$

también

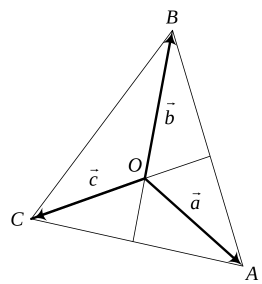
$\vec{x}\times\vec{c} = -\vec{d} + \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{c^2}\vec{c}$, remplazando estas últimas expresiones en (1)

y como $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son no coplanares, entonces $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] \neq 0$ luego resulta

$$\vec{x} = \frac{1}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}\{(\vec{a}\times\vec{b})\times(-\vec{d} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{c^2}\vec{c}) - -\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{c^2}\vec{c}\}$$

21. Demostrar que las alturas de un triángulo son concurrentes.

Demostración.



En el triángulo de la figura suponemos que las alturas trazadas desde B y C concurren en O(origen), entonces $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$.

Como OB y CA son perpendiculares, lo mismo que OC y AB,

$$\vec{OB}\cdot\vec{CA} = 0 \Leftrightarrow \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{OC}\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a}$$

Entonces,

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$$

Por lo tanto, OA es perpendicular a BC y se demuestra lo pedido.

Ejercicios Propuestos

1. Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelógramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

2. Demuestre que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si y solo si $\| \vec{a} + \vec{b} \| = \| \vec{a} - \vec{b} \|$

3. Si $\|\vec{a}\| = 2$ y $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b}$, demuestre que:

$$[\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b}] = 3\vec{b}$$

4. Si las diagonales de un paralelógramo son ortogonales, entonces demostrar que el paralelógramo es un rombo.

5. Demuestre que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si y solo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

6. Demostrar que $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\,\vec{a} \times \vec{b}$ y dar una interpretación geométrica.

7. Demostrar que si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores no paralelos y que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ entonces $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. ¿Cuál es la interpretación geométrica que se puede dar?

8. Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿puede concluírse que $\vec{b} = \vec{c}$?

9. Demuestre la identidad de Jacobi:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

10. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \quad \text{es que} \quad (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

11. Sea un triángulo ABC, y O un origen cualquiera, demostrar que el área del triángulo está dada por $\frac{1}{2}\| \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} \|$

12. Demostrar que

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}) = 2\,[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$$

13. Demostrar que los puntos medios de las seis aristas de un cubo que no cortan a una diagonal, son coplanares.

14. Aproveche el producto vectorial, para deducir el teorema del seno en un triángulo. Utilice un triángulo en donde el tercer lado $\vec{c}$ sea igual a $\vec{a} - \vec{b}$.

15. Las normales exteriores de las caras de un tetraedro tienen longitudes proporcionales al área de sus caras respectivas. Demostrar que la suma de estos vectores es cero.

16. Demostrar que si se une el punto medio de uno de los lados no paralelos de un trapezoide a los extremos del lado opuesto, se obtiene un triángulo cuya área es la mitad de la del trapezoide.

17. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no paralelos dados por:

$$\vec{c} = (m + n - 1)\vec{a} + (m + n)\vec{b} \quad \text{y} \quad \vec{d} = (m - n)\vec{a} + (2m - n + 1)\vec{b}$$

Hallar m y n tales que $\vec{c} = 3\vec{d}$.

18. Demostrar la fórmula de Herón para el área de un triángulo de cuyos lados son $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

19. Si A, B, C, D son cuatro puntos en el espacio, demostrar que:

$$\vec{AB} \times \vec{CD} + \vec{BC} \times \vec{AD} + \vec{CA} \times \vec{BD}, \text{ es independiente de } D.$$

20. Resolver

a) $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, con $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

b) $(x \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \vec{x} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$

c) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\;(\,\vec{x} \times \vec{a}) + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{c} - \vec{c} \times (\,\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}\,)$

21. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman entre ellos un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ y la longitud de $\vec{u}$

3. Determinar la magnitud de $\vec{v}$ tal que $\vec{u} - \vec{v}$ sea ortogonal con $\vec{u}$.

22. Demostrar que

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\,[\vec{d}\vec{e}\vec{f}] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{a} \cdot \vec{f} \\ \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{f} \\ \vec{c} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{f} \end{vmatrix}$$

23. Si $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \alpha$, $\widehat{b} \cdot \widehat{c} = \beta$ y $\widehat{c} \cdot \widehat{a} = \gamma$, demuestre que

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma)^{1/2}$$

24. Si G es el centroide del sistema de masas M_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ colocadas en los puntos P_i. Probar que:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\, \vec{p}_i^{\,2} = M\,\vec{g}^{\,2} + \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(\vec{p}_i - \vec{g})^2$ siendo $M = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$

b) $M^2\,\vec{g}^{\,2} = M\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\,\vec{p}_i^{\,2} - \sum\limits_{i \neq j} M_i M_j\,(\vec{p}_j - \vec{p}_i)^2$

c) $\sum\limits_{i\neq j} M_i M_j\,(\vec{p}_j - \vec{p}_i)^2 = M\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(\vec{p}_i - \vec{g})^2$

25. Dados n puntos se une cada uno de ellos con el baricentro de los otros $(n-1)$. Demostrar que las n rectas así formadas concurren en el baricentro de los n puntos.

26. Un segmento AB es dimidiado por P_1; P_1B es dimidiado por P_2; P_2B por P_3; y así sucesivamente. En los n puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ se colocan partículas de masas $m, \frac{1}{2}m, \frac{1}{2^2}m, \ldots$ respectivamente. Demostrar que la distancia del baricentro a B es igual a un tercio de AB.

27. Sea $\widehat{u}$ un vector unitario, α, β escalares, $\vec{a}$ es un vector dado y tales que $\alpha \neq 0$ y $\vec{a}^2 > 4\,\alpha\,\beta$.

    Resolver la ecuación $\alpha\,\vec{x}^2 + \vec{a}\cdot\vec{x} + \beta = 0$ y expresar $\vec{x}$ en la forma $\gamma\widehat{u} + \delta\vec{a}$.