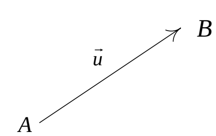
GEOMETRÍA VECTORIAL

En diversos cursos de la formación de un ingeniero, son importantes los vectores y su representación desde el punto de vista geométrico y algebraico, los conceptos que ellos involucran dejan una visión clara del fénomeno que se quiere estudiar, es por esto que en ésta formación básica son fundamentales y no se pueden omitir.

Los vectores representarán cantidades que tienen magnitud, dirección y sentido.

Es costumbre representar un vector por un segmento rectilineo que tiene un punto inicial A y un punto final B, en este último punto va una punta de flecha la que indica el sentido del vector, a la longitud de dicho segmento se suele definir como la norma o magnitud del vector y se denotará por $\| \vec{AB} \|$, así entonces



$$\vec{u} = \vec{AB}$$

Note que $\| \vec{u} \| \geq 0$ para todo vector $\vec{u}$

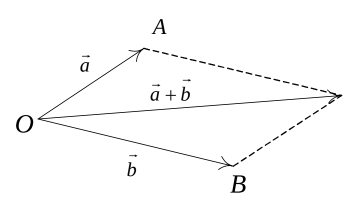
En forma más precisa diremos que la dirección de un vector da la pendiente o inclinación de la recta portadora y el sentido de un vector indica en qué forma actúa a lo largo de dicha recta.

Igualdad

Se define la igualdad $\vec{a} = \vec{b}$ si y solo si $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \|$ y también la igualdad en la dirección y sentido.

Suma

La suma de vectores se define mediante la ley del paralelogramo como se indica en la figura.



Propiedades:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

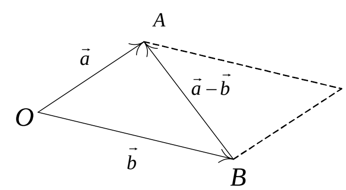
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

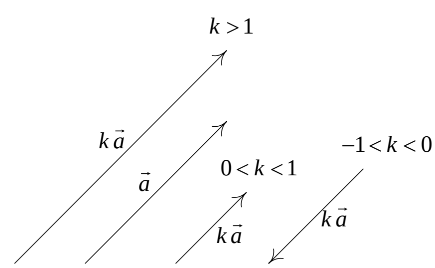
Donde el vector $\vec{0}$ se llama $vector\,nulo$ o neutro de la suma, su magnitud es 0 y se representa por un punto y el vector $-\vec{a}$ es el $vector\,opuesto$ de $\vec{a}$, que es un vector paralelo, de la misma longitud pero de sentido contrario.

La diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ se puede definir como la suma de dos vectores es decir $\vec{a}+(-\vec{b})$



Ponderación

Dado el vector $\vec{a}$ y el número real k, se define el vector $k\vec{a}$ como el vector con la misma dirección de $\vec{a}$ pero de longitud $||k\vec{a}||$. Si k es un número positivo, el sentido de $k\vec{a}$ es el mismo que el de $\vec{a}$; y si k es un número negativo, $k\vec{a}$ es de sentido contrario al de $\vec{a}$. Al real k se acostumbra a llamar $escalar$.



Propiedades:

1) $k(p\vec{a})=(kp)\vec{a}$

2) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

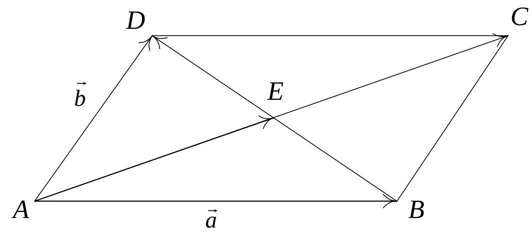
3) $(k+p)\vec{a}=k\vec{a}+p\vec{a}$

4) $k\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\ k=0\ \vee\ \vec{a}=\vec{0}$

5) $\vec{a}\,||\,\vec{b}\ \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{a}=k\vec{b},\ k\neq 0,\ \vec{a}$ y $\vec{b}\neq\vec{0}$

Ejemplo 1

Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se dimidian



Demostración.

De la figura se tiene $\vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD} \Leftrightarrow k(\vec{a}+\vec{b}) + p(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}$

de donde $(k-p)\,\vec{a} + (k+p-1)\,\vec{b} = \vec{0}$ como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no paralelos entonces

$$k - p = 0 \text{ y } k + p - 1 = 0; \text{ de donde se obtiene } k = p = \frac{1}{2}$$

por tanto, las diagonales se bisecan mutuamente.

Los vectores atendiendo a las aplicaciones físicas se pueden clasificar en:

1. Vectores libres.
2. Vectores deslizantes.
3. Vectores fijos.

Un vector libre no tiene posición fija en un sistema (plano o espacio). Tal cantidad se puede representar por un número infinito de vectores que tienen la misma magnitud, dirección y sentido.

Un vector deslizante tiene una y sólo una recta en el sistema a lo largo de la cuál actúa. Puede representarse por cualquier vector que tenga la misma magnitud, dirección y sentido, contenido en esta recta.

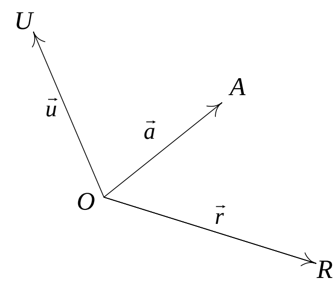
Un vector fijo tiene un punto de aplicación y solo uno y por tanto su representación es única.

Con respecto a los vectores fijos es costumbre implantar un punto O, que comunmente se suele llamar origen, con respecto del cuál se fijan todos los vectores inmersos en un sistema, este sistema se llama sistema de referencia, más adelante implantaremos los referenciales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

En un sistema cualquiera sea O el origen y el vector que lo representa es el vector

$\vec{0}$.

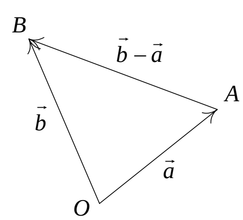
Un vector cualquiera fijo en este sistema y con respecto al origen O, lo fijaremos mediante el llamado $vector\, de\, posicion$, es decir $\vec{OA} = \vec{a}$.



Relación fundamental.

Notemos que con la sustentación de la diferencia de vectores se tiene la relación fundamental

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

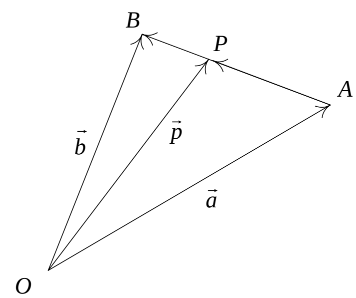


División de un segmento.

Vector de posición de un punto P, que divide a un segmento AB en una razón dada λ.

Sean A y B dos puntos dados sobre una recta $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sus vectores de posición con $\vec{a} \neq \vec{b}$. Un punto P divide al segmento AB en la razón λ si y solo si

$$\vec{AP} = \lambda\, \vec{PB} \Leftrightarrow \vec{p} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{p}) \Leftrightarrow \vec{p} = \frac{\vec{a} + \lambda\vec{b}}{1 + \lambda}$$



hora si $\lambda = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m}$, de donde se infiere que P divide al trazo AB en la razón $\dfrac{m}{n}$.

Si $m = n$ o bien $\lambda = 1$, se obtiene el vector de posición del punto medio del segmento AB, que es $\vec{p} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Variación de λ, en forma esquemática se puede expresar

$$\underset{}{(-1 < \lambda < 0)} \ \underset{A}{|} \ (0 < \lambda < \infty) \ \underset{B}{|} \ (-\infty < \lambda < -1)$$

Si $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\infty$, $\lambda = -1$, el punto P está en A, en B, o en un punto al infinito de esa recta.

Consecuencias:

1) Tres puntos distintos A, B y C son colineales si y solo si existen tres escalares p, q, r distintos de cero, tales que $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ con $p + q + r = 0$

2) Cuatro puntos A, B, C y D tales que no haya tres de ellos colineales, son coplanares si y solo si existen cuatro escalares p, q, r, t distintos de cero tales que

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} + t\vec{d} = \vec{0} \text{ con } p + q + r + t = 0$$

Dependencia lineal y bases

1. Se dice que el vector $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ si y solo si existen escalares x_i tales que

$$\vec{u} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

2. Se dice que los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ son linealmente independientes si y solo si

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

en caso contrario se dirán linealmente dependientes.

3. Se dice que los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ forman una base si y solo si, son son linealmente independientes y tienen la capacidad de generar todos los del sistema.

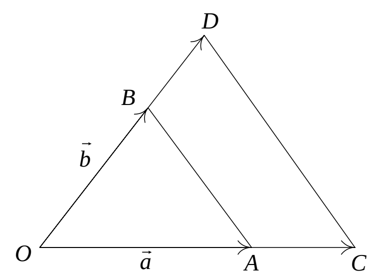
Consecuencias:

1) En el plano dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos y no colineales son linealmente independientes y generan todos los vectores de dicho plano, entonces $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es una base.

2) En el espacio tres vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no nulos y no coplanares son linealmente independientes y generan todos los vectores de dicho espacio, entonces $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es una base.

Ejemplo 2

Demostrar vectorialmente $AB \,||\, CD \Leftrightarrow \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OB}{BD}$



Demostración.

$\Rightarrow$)

Sea $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base, entonces si $AB \,||\, CD \Rightarrow \vec{AB} = m\vec{CD}$, $m \neq 0$, por otra parte $\vec{OC} = x\,\vec{a}$, $\vec{OD} = y\,\vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = y\,\vec{b} - x\,\vec{a}$, así

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = m(y\,\vec{b} - x\,a) \Leftrightarrow (1 - mx)\vec{a} + (my - 1)\vec{b} = \vec{0}, \text{ como}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es una base $1 - mx = 0 \,\wedge\, my - 1 = 0$ de donde $x = y = \dfrac{1}{m}$

Así,

$$\tfrac{OC}{OA} = \tfrac{OD}{OB} \Leftrightarrow \tfrac{OC - OA}{OA} = \tfrac{OD - OB}{OB} \Leftrightarrow \tfrac{AC}{OA} = \tfrac{BD}{OB} \Leftrightarrow \tfrac{OA}{AC} = \tfrac{OB}{BD}$$

$\Leftarrow$)

$$\tfrac{OA}{AC} = \tfrac{OB}{BD} \Leftrightarrow \tfrac{AC}{OA} = \tfrac{BD}{OB} \Leftrightarrow \tfrac{OA+AC}{OA} = \tfrac{OB+BD}{OB} \Leftrightarrow \tfrac{OC}{OA} = \tfrac{OD}{OB} = k$$

de donde

$$OC = k\,\vec{a} \;\; \wedge \;\; OD = k\,\vec{b},$$

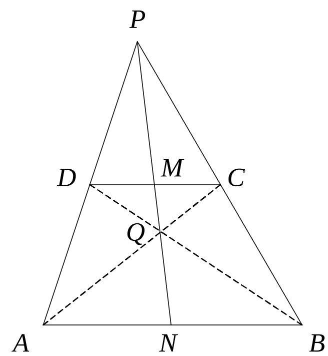
por otra parte

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \;\wedge\; \vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = k\vec{b} - k\vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a}) = k\vec{AB}$$

por tanto $AB \,||\, CD$.

Ejemplo 3.

Demostrar que la recta que une el punto de intersección de los lados de un trapecio con el punto de intersección de sus diagonales, dimidia las bases.



Demostración.

$$DC||AB \Leftrightarrow \vec{DC} = \lambda\vec{AB} \quad \Leftrightarrow \vec{c} - \vec{d} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \Leftrightarrow \vec{c} + \lambda\vec{a} = \vec{d} + \lambda\vec{b} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\vec{c} + \lambda\vec{a}}{1+\lambda} = \dfrac{\vec{d} + \lambda\vec{b}}{1+\lambda}$ este es un vector de posición del punto de intersccción

de las diagonales AC y DB es decir $\vec{q} = \dfrac{\vec{c} + \lambda\vec{a}}{1+\lambda} = \dfrac{\vec{d} + \lambda\vec{b}}{1+\lambda} \qquad (1)$

analogamente de $(*)$ se tiene que $\vec{p} = \dfrac{\vec{c} - \lambda\vec{b}}{1-\lambda} = \dfrac{\vec{d} - \lambda\vec{a}}{1-\lambda} \qquad (2)$

De (1) y (2) se tiene $(1+\lambda)\vec{q} = \vec{c} + \lambda\vec{a} \;\wedge\; (1-\lambda)\vec{p} = \vec{d} - \lambda\vec{a}$, sumando

miembro a miembro $(1+\lambda)\vec{q} + (1-\lambda)\vec{p} = \vec{c} + \vec{d}$ de donde

$\dfrac{(1+\lambda)\vec{q} + (1-\lambda)\vec{p}}{(1+\lambda) + (1-\lambda)} = \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$ este es el vector de posición de un punto

entre PQ y CD que no es otro que el punto M y como $\vec{m} = \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$, es punto

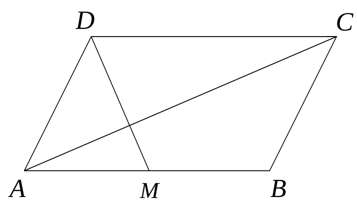
medio de CD.

Analogamente se obtiene $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \dfrac{(1+\lambda)\vec{q}-(1-\lambda)\vec{p}}{2\lambda} = \vec{n}$

Igualdades que nos indican que M y N son colineales con P y Q y además que dimidian a CD y AB respectivamente.

Ejercicios Resueltos

1. Demuestre que en todo paralelógramo, el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, triseca una diagonal y es trisectado por ella.



Solución.

$$M \text{ punto medio de } AB \Rightarrow \vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{b} = 2\vec{m}-\vec{a} \ \ (1)$$

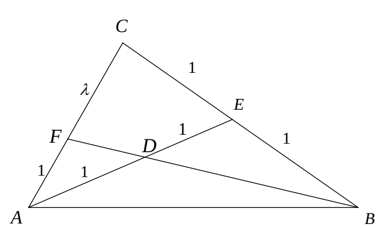
Por ser un paralelógramo $\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{d}-\vec{a} = \vec{c}-\vec{b}$ por (1)

$\vec{d}-\vec{a} = \vec{c}-2\vec{m}+\vec{a} \Leftrightarrow \vec{d}+2\vec{m} = \vec{c}+2\vec{a} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{d}+2\vec{m}}{3} = \dfrac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}$ de donde

se tiene que $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{MP}{PD} = \dfrac{1}{2}$, como se pretendía.

2. Sea D el punto medio de la transversal de gravedad AE del triángulo ABC. La recta BD corta a AC en el punto F. Determine vectorialmente la razón en que F divide AC.

Solución.



Sea el origen el vertice A, $\{\vec{b}, \vec{c}\}$ base, luego se tiene:

$$\vec{d} = \frac{\vec{e}}{2} \quad \text{y} \quad \vec{e} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \;\Rightarrow\; \vec{d} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{4}, \text{ también } \vec{f} = \frac{\vec{c}}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Como F, D y B son colineales, entonces:

$$\vec{f} = \alpha\,\vec{d} + (1-\alpha)\vec{b},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Así: $\vec{f} = \alpha\,\vec{d} + (1-\alpha)\vec{b} = \alpha\,\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{4} + (1-\alpha)\vec{b} = (1-\dfrac{3}{4}\alpha)\,\vec{b} + \dfrac{1}{4}\alpha\vec{c} \qquad (2)$

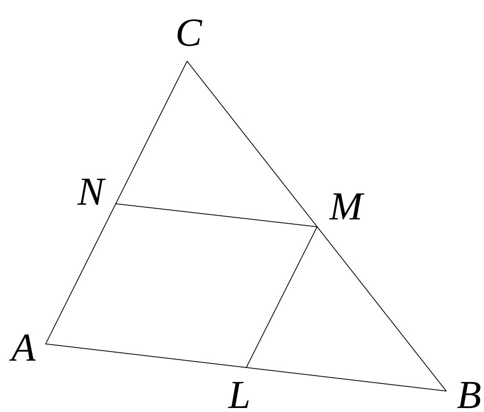
Como $\{\vec{b},\vec{c}\}$ es una base de (1) y (2) se deduce que:

$$(1-\tfrac{3}{4}\alpha = 0 \;\text{ y }\; \tfrac{1}{4}\alpha = \tfrac{1}{1+\lambda}) \Rightarrow \lambda = 2$$

Luego F divide a AC en la razón $1 : 2$.

3. Si ABC es un triángulo cualquiera L, M, N los puntos medios de sus lados, AB, BC y CA respectivamente, demostrar que $ALMN$ es un paralelógramo.

Demostración.



Sea O un origen cualquiera, por demostrar que

$$\vec{AL} = \vec{NM} \;\text{ y }\; \vec{AN} = \vec{LM}$$

como L, M, N son los puntos medios de los lados AB, BC y CA entonces

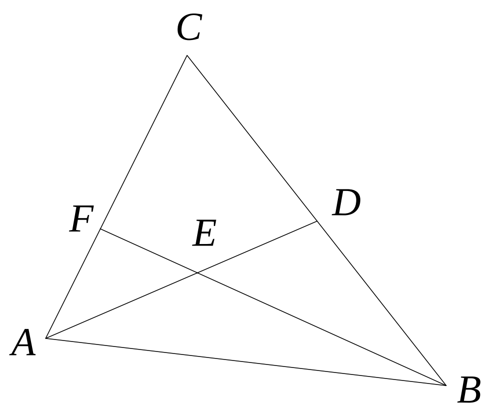
$$\vec{l} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{n} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$

De inmediato

$$\vec{AL} = \vec{l} - \vec{a} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2} = \vec{NM}$$

analogamente para $\vec{AN} = \vec{LM}$.

4. Se da en un triángulo ABC, la transversal de gravedad AD. Por B se traza una recta BEF que pasa por el punto medio E de AD (F sobre AC). Demostrar que: $3AF = AC$.



Demostración.

Se tiene que $\vec{d} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ y $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$ de donde obtenemos

$$2\vec{d} = \vec{b}+\vec{c} \;\text{ y }\; \vec{d} = 2\vec{e}-\vec{a} \;\text{ entonces }\; 2(2\vec{e}-\vec{a}) = \vec{b}+\vec{c}$$

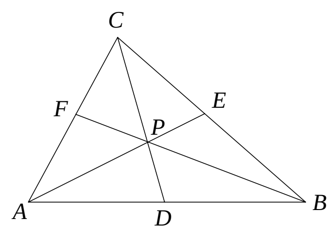
de aquí $4\vec{e}-\vec{b} = 2\vec{a}+\vec{c} \Leftrightarrow \dfrac{4\vec{e}-\vec{b}}{3} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3} = \vec{f}$ esta igualdad implica que

$$2\vec{AF} = \vec{FC} \Leftrightarrow 2\vec{AF}+\vec{AF} = \vec{AF}+\vec{FC} = \vec{AC} \Leftrightarrow 3\vec{AF} = \vec{AC}$$

Compare esta forma de solución con la solución dada en el problema 2.

5. Demostrar que si en un triángulo ABC, las transversales CD, AE y BF son concurrentes en P, se tiene:

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FA} = -1$$



Demostración.

Sean:

$$\frac{DA}{DB}=p, \qquad \frac{EB}{EC}=q, \qquad \frac{FC}{FA}=r$$

entonces : $\vec{DA}=p\,\vec{DB}\Rightarrow \vec{a}-\vec{d}=p(\vec{b}-\vec{d})\Leftrightarrow \vec{d}=\dfrac{\vec{a}-p\vec{b}}{1-p}$

analogamente obtenemos: $\vec{e}=\dfrac{\vec{b}-q\vec{c}}{1-q}$ y $\vec{f}=\dfrac{\vec{c}-r\vec{a}}{1-r}$

Ahora, como los puntos A,B,C y P son coplanares existen escalares no todos nulos tales que:

$$\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}+\pi\,\vec{p}=\vec{0},\ \text{con}\ \alpha+\beta+\gamma+\pi=0$$

De estas expresiones se obtiene:

$$\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma\vec{c}+\pi\vec{p}}{\gamma+\pi}=\vec{d},\ \text{pues}\ D=AB\cap CP$$

$$\frac{\gamma\vec{c}+\beta\vec{b}}{\gamma+\beta}=\frac{\alpha\vec{a}+\pi\vec{p}}{\alpha+\pi}=\vec{e},\ \text{pues}\ E=BC\cap AP$$

$$\frac{\gamma\vec{c}+\alpha\vec{a}}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta\vec{b}+\pi\vec{p}}{\beta+\pi}=\vec{f},\ \text{pues}\ F=AC\cap BP$$

Así,

$$\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}{\alpha+\beta}=\frac{\vec{a}+\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\vec{a}-p\vec{b}}{1-p}\ \Rightarrow\quad p=-\frac{\beta}{\alpha}$$

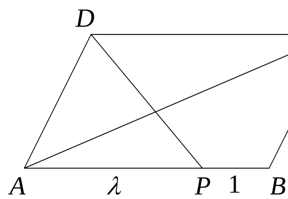
$$\frac{\gamma\vec{c}+\beta\vec{b}}{\gamma+\beta}=\frac{\vec{b}+\frac{\gamma}{\beta}\vec{c}}{1+\frac{\gamma}{\beta}}=\frac{\vec{b}-q\vec{c}}{1-q}\ \Rightarrow\quad q=-\frac{\gamma}{\beta}$$

$$\frac{\gamma\vec{c}+\alpha\vec{a}}{\gamma+\alpha}=\frac{\vec{c}+\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a}}{1+\frac{\alpha}{\gamma}}=\frac{\vec{c}-r\vec{a}}{1-r}\ \Rightarrow\quad r=-\frac{\alpha}{\gamma}$$

Finalmente:

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FA}=p\cdot q\cdot r=\,-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\,-\frac{\gamma}{\beta}\cdot\,-\frac{\alpha}{\gamma}=\,-1$$

6. En el paralelógramo de la figura, si P divide al trazo AB en la razón λ, demuestre que la recta DP divide a la diagonal AC en la razón $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$



Solución.

P divide al trazo AB en la razón $\lambda \Leftrightarrow \vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda} \Leftrightarrow (1+\lambda)\vec{p}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ $\quad(1)$

Como P es un paralelógramo entonces, $\vec{AD}=\vec{BC} \Leftrightarrow \vec{d}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ $\quad(2)$

De (2), $\lambda\vec{d}-\lambda\vec{a}=\lambda\vec{c}-\lambda\vec{b}$ eliminamos $\lambda\vec{b}$ ocupando (1) resulta:

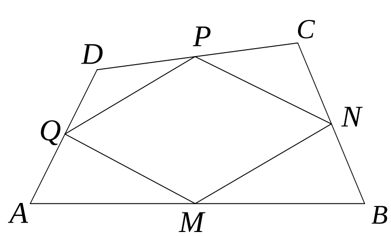
$(1+\lambda)\vec{p}+\lambda\vec{d}-\lambda\vec{a}=\vec{a}+\lambda\vec{c} \Leftrightarrow (1+\lambda)\vec{p}+\lambda\vec{d}=(1+\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{c}$ de aquí

$\dfrac{(1+\lambda)\vec{p}+\lambda\vec{d}}{1+2\lambda}=\dfrac{(1+\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{c}}{1+2\lambda} \Rightarrow DP$ divide a la diagonal AC en la razón $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

7. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos de un cuadrilátero $ABCD$ determinan un paralelógramo cuyo centro es

$$\tfrac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$$

Demostración.



Por demostrar que: $\vec{MQ}=\vec{NP} \quad\wedge\quad \vec{QP}=\vec{MN}$

Hip.: $\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\ \vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ y $\vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})$

$\vec{MQ} = \vec{q} - \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) \quad (1)$

$\vec{NP} = \vec{p} - \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) \qquad (2)$

De (1) y (2) se tiene $\vec{MQ} = \vec{NP}$, analogamente para $\vec{QP} = \vec{MN}$

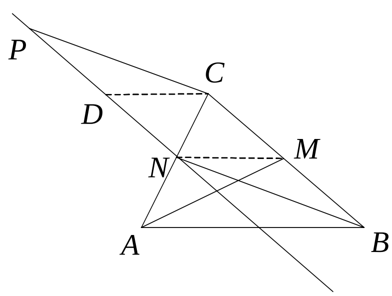
En un paralelógramo el centro se obtiene, en la intersección de sus diagonales que es el punto medio de MP y QN, así:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{m}) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})] = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$$

o bien $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{q} + \vec{n}) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})] = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

8. En un triángulo ABC, se trazan las transversales de gravedad AM y BN, por N una paralela a BC y por C una paralela a BN. Estas dos rectas se cortan en P y sea D el punto medio de PN. Demostrar que CD es paralela a MN.

Demostración.



Sea C el origen, $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ base; entonces $\vec{m} = \dfrac{\vec{b}}{2}$, $\vec{n} = \dfrac{\vec{a}}{2}$

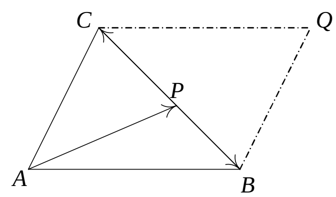
Por otra parte : $PN||BC$ y $PC||BN$ luego $BCPN$ es un paralelógramo, entonces $\vec{CP} + \vec{CB} = \vec{CN} \Leftrightarrow \vec{p} + \vec{b} = \vec{n} \Leftrightarrow \vec{p} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$

Ahora: $$\vec{CD} = \vec{d} = \frac{\vec{n} + \vec{p}}{2} = \frac{\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \qquad (1)$$

$$\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \qquad (2)$$

Finalmente por (1) y (2) $\vec{CD} = \vec{MN} \Rightarrow CD||MN$.

9. Sea ABC un triángulo y P un punto variable de BC. Si $\vec{PQ}$ es la resultante de $\vec{AP}$, $\vec{PB}$ y $\vec{PC}$, demostrar que $ABQC$ es un paralelógramo y por tanto Q es fijo.



Solución.

Por hipótesis se tiene,

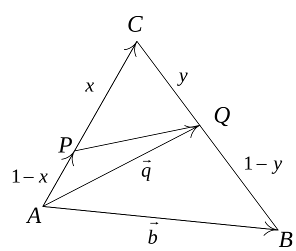
$$\vec{PQ} = \vec{AP} + \vec{PB} + \vec{PC} \qquad (1)$$

considerando el punto A como el origen, de (1) se sigue que

$$\vec{q} - \vec{p} = \vec{p} + \vec{b} - \vec{p} + \vec{c} - \vec{p} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{p} \Rightarrow \vec{q} = \vec{b} + \vec{c}$$

de aquí se deduce $\vec{AQ} = \vec{AB} + \vec{AC}$ lo que describe a un paralelógramo de vértices A, B, Q y C, donde Q es fijo ya que no depende del punto P variable.

10. P y Q dividen a los lados CA y CB de un triángulo ABC en las razones $\dfrac{x}{1-x}$ y $\dfrac{y}{1-y}$ respectivamente. Si $\vec{PQ} = \lambda\,\vec{AB}$, demostrar que: $x = y = \lambda$.



Solución.

Sea A el origen, entonces:

$$\vec{AB} = \vec{b},\ \vec{AC} = \vec{c},\ \vec{AP} = \vec{p},\ \vec{AQ} = \vec{q}$$

por hipótesis:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \frac{AP}{PC + AP} = \frac{1-x}{x + (1-x)} = 1 - x \Rightarrow \vec{AP} = (1-x)\vec{AC}$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{1-y}{y} \Rightarrow \frac{BQ}{QC + BQ} = \frac{1-y}{y + (1-y)} = 1 - y \Rightarrow \vec{BQ} = (1-y)\vec{BC}$$

Por una parte se tiene,

$$\vec{q} = \vec{p} + \vec{PQ} = \vec{p} + \lambda\,\vec{AB} = \vec{p} + \lambda\,\vec{b},\ \text{pero}\ \vec{p} = (1-x)\vec{c}$$

por tanto

$$\vec{q} = (1-x)\vec{c} + \lambda\,\vec{b} \qquad (1)$$

también

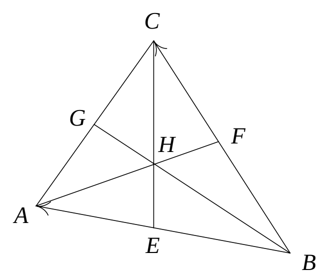
$$\vec{q} = \vec{b} + \vec{BQ} = \vec{b} + (1-y)\vec{BC} = \vec{b} + (1-y)(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{q} = y\,\vec{b} + (1-y)\,\vec{c} \qquad (2)$$

pero $\{\vec{b}, \vec{c}\}$ forman una base, por tanto de (1) y (2) se tiene

$$1 - x = 1 - y \ \wedge \ y = \lambda \ \text{ por tanto } \ x = y = \lambda$$

11. Demostrar que en todo triángulo, las transversales de gravedad se trisecan mutuamente.



Demostración.

Sean E y F puntos medios de AB y BC respectivamente, $H = EC \cap AF$ considerando al punto B como el origen, se tiene

$$\vec{h} = \vec{BA} + \vec{AH} = \vec{BA} + \lambda\vec{AF} = \vec{a} + \lambda(\vec{f} - \vec{a}), \text{ pero } \vec{f} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{h} = (1-\lambda)\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{c} \qquad (1)$$

también,

$$\vec{h} = \vec{BC} + \vec{CH} = \vec{c} + \gamma\,\vec{CE} = \vec{c} + \gamma(\vec{e} - \vec{c}), \text{ pero } \vec{e} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{h} = \vec{c} + \gamma\,(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}) = (1-\gamma)\vec{c} + \frac{\gamma}{2}\,\vec{a} \qquad (2)$$

como $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ son linealmente independientes, entonces de (1) y (2) se obtienen

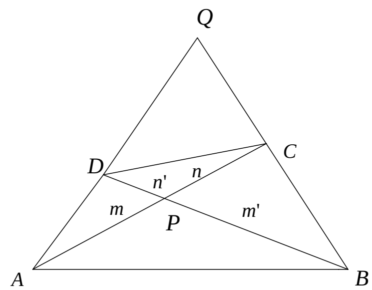
$$(\,1 - \lambda = \frac{\gamma}{2} \ \wedge \ 1 - \gamma = \frac{\lambda}{2}\,) \Rightarrow \gamma = \lambda = \frac{2}{3}$$

por tanto, H triseca a AF y CE, ya que:

$$\vec{AH} = \frac{2}{3}\,\vec{AF} \Leftrightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad \vec{CH} = \frac{2}{3}\,\vec{CE} \Leftrightarrow \frac{CH}{CE} = \frac{2}{3}$$

12. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en un punto

P, que divide a AC en la razón $m:n$ y a BD en la razón $m':n'$. Hallar la razón en la cual el punto de intersección Q, divide a los lados AD y BC.



Solución.

Considerando al punto Q como el origen, entonces : $\vec{a}=\lambda\vec{d} \;\wedge\; \vec{b}=\mu\vec{c}$, por determinar λ y μ.

Note que P, se puede expresar de dos maneras:

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{c}}{n+m}=\frac{n'\vec{b}+m'\vec{d}}{n'+m'} \Leftrightarrow \vec{p}=\frac{n\lambda\vec{d}+m\vec{c}}{n+m}=\frac{n'\mu\vec{c}+m'\vec{d}}{n'+m'}$$

pero como $\{\vec{c},\vec{d}\}$ son linealmente independientes, se tiene

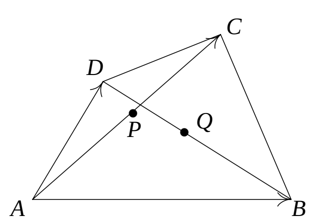
$$\frac{n\lambda}{n+m}=\frac{m'}{n'+m'} \Leftrightarrow \lambda=\frac{(n+m)m'}{(n'+m')n}$$

$$\frac{m}{n+m}=\frac{n'\mu}{n'+m'} \Leftrightarrow \mu=\frac{(n'+m')m}{(n+m)n'}$$

Así,

$$\frac{QA}{QD}=\lambda=\frac{(n+m)m'}{(n'+m')n} \quad \text{y} \quad \frac{QB}{QC}=\mu=\frac{(n'+m')m}{(n+m)n'}$$

13. Dos fuerzas actúan en el vértice de un cuadrilátero $ABCD$, representadas por $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$; y otras dos en C, representadas por $\vec{CB}$ y $\vec{CD}$. Demostrar que su resultante está representada por $4\vec{PQ}$, donde P y Q son los puntos medios de AC y BD.



Demostración.

Por demostrar que $\vec{AB}+\vec{AD}+\ \vec{CB}+\vec{CD}=4\ \vec{PQ}$

Sea A el origen, entonces: $\vec{AB}=\vec{b},\ \vec{AD}=\vec{d},\ \vec{CD}=\vec{d}-\vec{c},\quad \vec{CB}=\vec{b}-\vec{c}$

Por lo tanto

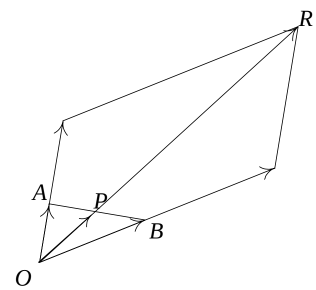
$$\begin{aligned}\vec{AB}+\vec{AD}+\ \vec{CB}+\vec{CD}&=\vec{b}+\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}-\vec{c}\\&=2(\vec{b}+\vec{d})-2\vec{c}\end{aligned}$$

por otra parte, P punto medio de AC $\Rightarrow \vec{p}=\dfrac{\vec{c}}{2}\Leftrightarrow \vec{c}=2\,\vec{p}$

Q punto medio de BD $\Rightarrow \vec{q}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\Leftrightarrow \vec{b}+\vec{d}=2\vec{q}$

luego $\vec{AB}+\vec{AD}+\ \vec{CB}+\vec{CD}=4\,\vec{q}-4\,\vec{p}=4(\vec{q}-\vec{p})=4\,\vec{PQ}$.

14. Demostrar que si dos fuerzas concurrentes son representadas por $n\vec{OA}$ y $m\vec{OB}$, su resultante está dada por $(m+n)\,\vec{OP}$, donde P es el punto de intersección de $\vec{AB}$ con dicha resultante.



Demostración.

Siendo O el origen, se define $\vec{p}$ de dos maneras, que son:

$$\vec{p}=\vec{OA}+\vec{AP}=\vec{OA}+\lambda\,\vec{AB}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})=(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\quad\vec{b}$$

y $$\vec{p}=\mu\,\vec{OR}=\mu(n\vec{OA}+m\vec{OB})=\mu n\,\vec{a}+\mu m\,\vec{b}$$

Dado que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores linealmente independientes, se tiene:

$$(\mu n=1-\lambda\ \text{ y }\ \mu m=\lambda)\Rightarrow\ \lambda=\frac{m}{m+n}\ \text{ y }\ \mu=\frac{1}{m+n}$$

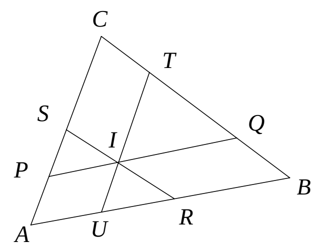
luego, $\vec{p}=(1-\dfrac{m}{m+n})\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}\vec{b}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}$

de donde se obtiene

$$n\vec{a}+m\vec{b}=(m+n)\,\vec{p}$$

15. Por un punto I cualquiera del interior de un trángulo ABC se trazan $PQ||AB$, $RS||BC$ y $TU||CA$ $(P, S$ en AC; T, Q en BC; UR en $AB)$. Demostrar que

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = 2$$



Demostración.

Sea I el origen, entonces

$$\vec{p} = \lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{c}; \;\; \vec{q} = \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{c}$$

de donde

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = \lambda\,\vec{AB} \Leftrightarrow \frac{PQ}{AB} = \lambda \qquad (1)$$

analogamente

$$\vec{u} = \gamma\vec{a} + (1-\gamma)\vec{b}; \;\; \vec{t} = \gamma\vec{c} + (1-\gamma)\vec{b}$$

$$\vec{UT} = \vec{t} - \vec{u} = \gamma(\vec{c} - \vec{a}) = \gamma\,\vec{AC} \Leftrightarrow \tfrac{TU}{CA} = \gamma \qquad (2)$$

por otra parte

$$\vec{r} + \vec{q} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{b} - \vec{q} = (1-\lambda)\vec{b} - (1-\lambda)\vec{c}$$

$$\vec{s} + \vec{t} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{s} = \vec{c} - \vec{t} = (1-\gamma)\vec{c} - (1-\gamma)\vec{b}$$

de aquí

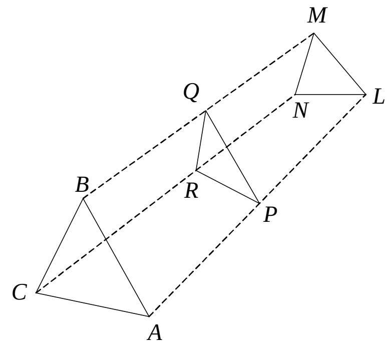
$$\vec{RS} = \vec{r} - \vec{s} = (2-\lambda-\gamma)\vec{c} - (2-\lambda-\gamma)\vec{b} = (2-\lambda-\gamma)(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{RS} = (2-\lambda-\gamma)\vec{BC} \Leftrightarrow \frac{RS}{BC} = 2-\lambda-\gamma \qquad (3)$$

finalmente de $(1), (2)$ y (3) se sigue

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = \lambda + \gamma + 2 - \lambda - \gamma = 2$$

16. En un plano se dan los triángulos ABC y LMN, si P, Q, R son los puntos medios de los trazos AL, BM y CN demostrar que los centros de gravedad de los triángulos ABC, LMN y PQR son colineales.



Demostración.

Sean G_1, G_2, G_3 los centros de gravedad de los triángulos ABC, LMN y PQR respectivamente, entonces:

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}, \;\; \vec{g}_2 = \frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}, \;\; \vec{g}_3 = \frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$$

De donde obtenemos:

$$3\vec{g}_1 = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}; \;\; 3\;\vec{g}_2 = \vec{l}+\vec{m}+\vec{n} \;\text{ y }\; 3\vec{g}_3 = \vec{p}+\vec{q}+\vec{r} \qquad (*)$$

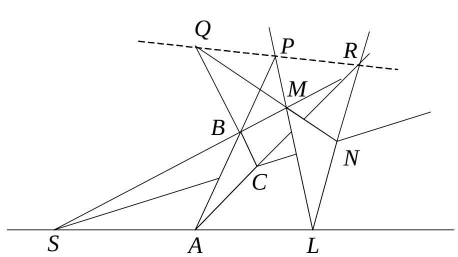
Ahora por hipótesis: $\vec{p} = \dfrac{\vec{a}+\vec{l}}{2}$, $\vec{q} = \dfrac{\vec{b}+\vec{m}}{2}$ y $\vec{r} = \dfrac{\vec{c}+\vec{n}}{2}$

Remplazando en $(*)$ resulta $3\vec{g}_3 = \dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}) \Leftrightarrow$

$6\,\vec{g}_3 = 3\vec{g}_1 + \;3\;\vec{g}_2 \Leftrightarrow \;6\,\vec{g}_3 - 3\vec{g}_1 - \;3\;\vec{g}_2 = \vec{0}$ y $6-3-3=0$

entonces G_1, G_2, G_3 son colineales.

17. Dados los triángulos ABC y LMN tales que las rectas que unen los vértices homólogos se cortan en un punto S. Demuestre que los puntos de intersección de los lados homólogos de estos triángulos, son colineales.



Demostración.

$$S, A, L \;\text{ colineales } \Leftrightarrow \vec{s} = \alpha\,\vec{a} + (1-\alpha)\vec{l}\;(1)$$

$$S, C, N \text{ colineales } \Leftrightarrow \vec{s} = \beta\, \vec{c} + (1-\beta)\, \vec{n} \qquad (2)$$

$$S, B, M \text{ colineales } \Leftrightarrow \vec{s} = \gamma\, \vec{b} + (1-\gamma)\, \vec{m} \qquad (3)$$

De (1) y (2) se deduce $\dfrac{\gamma\,\vec{c} - \alpha\,\vec{a}}{\gamma - \alpha} = \dfrac{(1-\alpha)\,\vec{l} - (1-\gamma)\,\vec{n}}{(1-\alpha)-(1-\gamma)} = \vec{r}$ $\qquad (4)$

De (2) y (3) se deduce $\dfrac{\beta\,\vec{b} - \gamma\,\vec{c}}{\beta - \gamma} = \dfrac{(1-\gamma)\,\vec{n} - (1-\beta)\,\vec{m}}{(1-\gamma)-(1-\beta)} = \vec{q}$ $\qquad (5)$

De (1) y (3) se deduce $\dfrac{\alpha\,\vec{a} - \beta\,\vec{b}}{\alpha - \beta} = \dfrac{(1-\beta)\,\vec{m} - (1-\alpha)\,\vec{l}}{(1-\beta)-(1-\alpha)} = \vec{p}$ $\qquad (6)$

De $(4), (5)$ y (6) respectivamente se obtienen:

$$\gamma\,\vec{c} - \alpha\,\vec{a} = (\gamma-\alpha)\vec{r}; \;\; \beta\,\vec{b} - \gamma\,\vec{c} = (\beta-\gamma)\vec{q}; \;\; \alpha\,\vec{a} - \beta\,\vec{b} = (\alpha-\beta)\vec{p}$$

sumando miembro a miembro, se obtiene

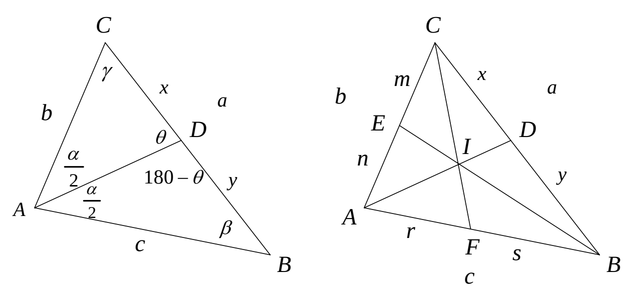
$$(\gamma-\alpha)\vec{r} + (\beta-\gamma)\vec{q} + (\alpha-\beta)\vec{p} = \vec{0}$$

relación que nos indica la colinealidad de los puntos R, Q y P pués

$(\gamma-\alpha) + (\beta-\gamma) + (\alpha-\beta) = 0$

18. Demostrar que las bisectrices de un triángulo ABC de lados a, b y c concurren al punto I(incentro)

$$\vec{i} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c}$$



Demostración.

Sea AD bisectriz, por teorema del seno en triángulos ADC y ADB, se tienen

$$\left(\frac{sen\,\frac{\alpha}{2}}{x} = \frac{sen\,\theta}{b} \;\wedge\; \frac{sen\,\frac{\alpha}{2}}{y} = \frac{sen(180-\theta)}{c} = \frac{sen\,\theta}{c} \right) \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

analogamente: $\quad \dfrac{m}{n}=\dfrac{a}{c} \quad \wedge \quad \dfrac{r}{s}=\dfrac{b}{a}$

entonces tenemos: $\vec{d}=\dfrac{x\,\vec{b}+y\,\vec{c}}{x+y}=\dfrac{\frac{x}{y}\,\vec{b}+\vec{c}}{\frac{x}{y}+1}=\dfrac{\frac{b}{c}\,\vec{b}+\vec{c}}{\frac{b}{c}+1}=\dfrac{b\,\vec{b}+c\,\vec{c}}{b+c}$ y también

$$\vec{e}=\frac{a\,\vec{a}+c\,\vec{c}}{a+c} \text{ y } \vec{f}=\frac{a\vec{a}+b\,\vec{b}}{a+b}$$

de estas expresiones establecemos

$$(b+c)\,\vec{d}=b\,\vec{b}+c\,\vec{c} \Leftrightarrow a\vec{a}+(b+c)\,\vec{d}=a\vec{a}+b\,\vec{b}+c\,\vec{c}$$

$$\frac{a\vec{a}+(b+c)\,\vec{d}}{a+b+c}=\frac{a\vec{a}+b\,\vec{b}+c\,\vec{c}}{a+b+c}$$

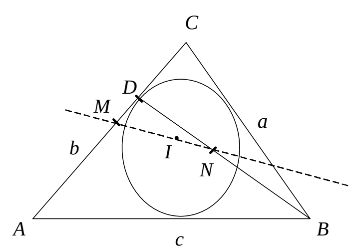
en forma similar obtenemos

$$\frac{b\vec{b}+(a+c)\,\vec{e}}{a+b+c}=\frac{a\vec{a}+b\,\vec{b}+c\,\vec{c}}{a+b+c} \quad \wedge \quad \frac{c\vec{c}+(a+b)\,\vec{f}}{a+b+c}=\frac{a\vec{a}+b\,\vec{b}+c\,\vec{c}}{a+b+c}$$

por tanto concluímos

$$\frac{a\vec{a}+(b+c)\,\vec{d}}{a+b+c}=\frac{b\vec{b}+(a+c)\,\vec{e}}{a+b+c}=\frac{c\vec{c}+(a+b)\,\vec{f}}{a+b+c}=\frac{a\vec{a}+b\,\vec{b}+c\,\vec{c}}{a+b+c}=\vec{i}$$

19. Sea D el punto de contacto de la circunferencia inscrita a un triángulo ABC, con el lado AB. Demostrar que el punto medio M de AB, el incentro I y el punto medio N de CD son colineales.



Demostración.

Sea el origen un punto O arbitrario, entonces se tiene:

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};\ \vec{i}=\frac{1}{2S}(a\vec{a}+b\,\vec{b}+c\,\vec{c}),\ S=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

también $AD=S-a \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{S-a}{c} \Rightarrow \vec{AD}=\dfrac{S-a}{c}\,\vec{AB}=\dfrac{S-a}{c}(\vec{b}-\vec{a})$

de aquí $\vec{d} = \dfrac{S-a}{c}\,\vec{b} + \dfrac{c+a-S}{c}\,\vec{a}$,

luego $\quad \vec{n} = \dfrac{1}{2}(\vec{d}+\vec{c}) = \dfrac{c+a-S}{2c}\,\vec{a} + \dfrac{S-a}{2c}\,\vec{b} + \dfrac{\vec{c}}{2}$

Vamos a demostrar que $\vec{MI}$ y $\vec{MN}$ son ponderados uno del otro, es decir

$$\vec{MI} = \vec{i} - \vec{m} = (\frac{a-s}{2S})\vec{a} + (\frac{b-s}{2S})\vec{b} + \frac{c}{2S}\,\vec{c}$$

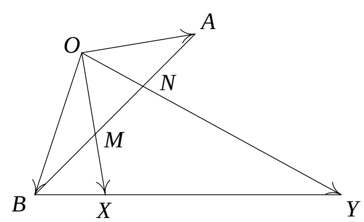
$$\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \frac{S}{c}[\,(\frac{a-s}{2S})\vec{a} + (\frac{b-s}{2S})\vec{b} + \frac{c}{2S}\,\vec{c}\,]$$

Por tanto $\quad \vec{MN} = \dfrac{S}{c}\,\vec{MI} \;\Rightarrow M, I, N$ son colineales.

20. Dado un triángulo OAB, se triseca el lado AB, obteniéndose los puntos N y M. Por B se traza una paralela a OA, que es cortada en X e Y, por las rectas OM y ON, respectivamente (Eligiendo O como origen)

a) Determinar los vectores de posición X e Y en términos de los de A y B.

b) Determinar en que razón divide X a BY, M a OX y N al trazo OY.



Solución.

a) Por hipótesis se tiene: $\quad \vec{n} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{3};\; \vec{m} = \dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

ahora:

$$\vec{OY} = \lambda\,\vec{ON} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{\lambda}{3}\,\vec{b} + \frac{2\lambda}{3}\,\vec{a} \qquad (1)$$

$$\vec{OX} = \beta\,\vec{OM} = \beta\vec{m} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{\beta}{3}\,\vec{a} + \frac{2\beta}{3}\,\vec{b} \qquad (2)$$

Por otra parte:

$$\vec{OY} = \alpha\,\vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{y} = \alpha\,\vec{a} + \vec{b}\ (3)$$

$$\vec{OX} = \gamma\,\vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{x} = \gamma\,\vec{a} + \vec{b}\ (4)$$

De (1) y (3); $\;(\dfrac{2\lambda}{3} - \alpha)\,\vec{a} + (\dfrac{\lambda}{3} - 1)\,\vec{b} = \vec{0}$, y como $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ son L.I.

$$\left(\frac{2\lambda}{3}-\alpha=0\ \wedge\ \frac{\lambda}{3}-1=0\right)\Rightarrow \alpha=2\ \wedge\ \lambda=3$$

De (2) y (4); $\left(\frac{\beta}{3}-\gamma\right)\vec{a}+\left(\frac{2\beta}{3}-1\right)\vec{b}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \beta=\frac{3}{2}\ \wedge\ \gamma=\frac{1}{2}$

Así entonces resultan:

$$\vec{y}=\vec{b}+2\,\vec{a}\ \ \wedge\ \ \vec{x}=\frac{1}{2}\,\vec{a}+\vec{b}$$

b) De $\vec{x}=\frac{1}{2}\,\vec{a}+\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}-\vec{x}=\frac{1}{2}\,\vec{a}\Leftrightarrow\vec{BX}=\frac{1}{2}\,\vec{OA}\Rightarrow\frac{BX}{OA}=\frac{1}{2}$

también $\vec{y}-\vec{x}=\frac{3}{2}\,\vec{a}\ \Leftrightarrow\vec{XY}=\frac{3}{2}\vec{OA}\Rightarrow\frac{XY}{OA}=\frac{3}{2}$, por tanto $\frac{BX}{XY}=\frac{1}{3}$

Ahora $\vec{OX}=\beta\,\vec{OM}\Leftrightarrow\vec{OM}+\vec{MX}=\beta\,\vec{OM}\Leftrightarrow\vec{MX}=(\beta-1)\vec{OM}\ \Rightarrow$

$$\frac{OM}{MX}=\frac{1}{\beta-1}=\frac{2}{1}$$

Finalmente $\vec{OY}=\lambda\,\vec{ON}\Leftrightarrow\vec{ON}+\vec{NY}=\lambda\,\vec{ON}\Rightarrow\frac{ON}{NY}=\frac{1}{\lambda-1}=\frac{1}{2}$

Ejercicios propuestos

1. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman lados consecutivos de un hexágono regular, el extremo de $\vec{a}$ coincide con el origen de $\vec{b}$. En términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hallar los vectores que forman los otros cuatro lados.
2. Demostrar que en todo triángulo, el trazo que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercero e igual a su mitad.
3. En un triángulo ABC, los puntos L, M y N son los puntos medios de los lados. Una recta cualquiera por C corta a MN en P y a LM en Q. Demostrar que AP es paralela a BQ.
4. Demostrar que el baricentro de un triángulo, es también el baricentro del triángulo cuyos vértices son puntos que dividen a los lados de aquel en una misma razón.
5. Demuestre que en todo triángulo, las alturas concurren en un punto.
6. Si $\vec{a},\vec{b}$ son los vectores de posición de A, B; determinar C de modo que $\vec{AC}=3\vec{AB}$ y determinar D de modo que $\vec{BD}=2\vec{BA}$.
7. Si A, B, C son puntos fijos y P un punto variable de modo que la fuerza resultante de $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$ pasa por C, hallar el lugar geométrico de P.

8. Demostrar que si D, E, F son los puntos medios de los lados de un triángulo ABC, entonces cualquiera sea el origen O, se verifica

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}$$

9. Se dibujan vectores desde el centro de un pentágono regular a sus vértices. Demostrar que su suma es cero.

10. Demostrar que las diagonales de un paralelepípedo de lados $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ se bisecan mutuamente.

11. Dado un triángulo ABC, se toman los puntos D y E en los lados BC y CA, respectivamente. Demostrar que los segmentos AD y BE no pueden dimidiarse mutuamente.

12. Demostrar que si en un paralelógramo $ABCD$, P es un punto del lado AB, Q un punto en el lado CD y además AQ y DP se cortan en L, QB y CP se cortan en M y AC y BD se cortan en N, entonces los puntos L, M y N son colineales.

13. En un triángulo ABC, las trasversales de gravedad AA', BB' y CC' se cortan en G. Se toma el punto medio D de GA y el punto medio E de GB. Demostrar que $DEA'B'$ es un paralelógramo.

14. Dado un cuadrilátero $ABCD$, se traza por B una paralela BF al lado $CD\,(F$ sobre $AC)$ y por C una paralela CG al lado $AB(G$ sobre $BD)$. Demostrar que FG es paralela a AD.

15. Demostrar que las alturas de un triángulo ABC de ángulos α, β, γ concurren a un punto(ortocentro) cuyo vector de posición es

$$\frac{tg\,\alpha\,\vec{a}+tg\,\beta\,\vec{b}+tg\,\gamma\,\vec{c}}{tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma}$$

16. Demostrar que las simetrales de un triángulo ABC de ángulos α, β, γ concurren a un punto(circuncentro) cuyo vector de posición es

$$\frac{sen\,2\alpha\,\vec{a}+sen\,2\beta\,\vec{b}+sen\,2\gamma\,\vec{c}}{sen\,2\alpha+sen\,2\beta+sen\,2\gamma}$$

17. a) Si O es el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo ABC, demostrar que: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OH}$ y que: $\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}=2\vec{HO}$.

    b) Demostrar que si AD es diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , entonces: $\vec{AH}+\vec{HB}+\vec{HC}=\vec{AD}$

18. Por los vértices A, B y C de un triángulo ABC se trazan rectas que cortan a los lados opuestos en P, Q y R respectivamente. Si AP, BQ, CR son concurrentes, entonces

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

19. En un cuadrilátero $ABCD$, el punto Q, en que las diagonales AC y BD se intersecan, divide a estos segmentos en las razones $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente. ¿En que razón divide el punto P, en el que se intersecan los lados AB y CD, a estos segmentos.

20. Dado un ángulo XOY, se toma F sobre OY y se traza por F una paralela a OX, que corta en E a una recta que pasa por O. Sea B el punto medio de EF. Por B se traza una recta que corta en A, C y D, respectivamente, a OX, OE y OY. Demostrar que:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$