Capítulo 11

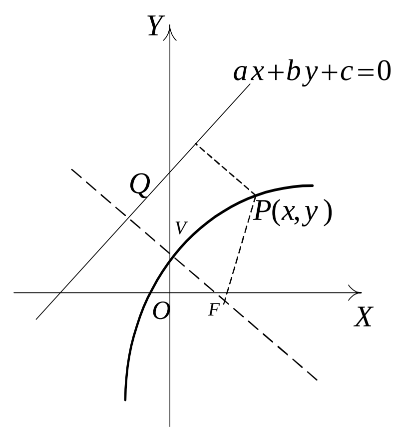
La Parábola

11.1 Definición.

Se llama parábola, al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija del mismo plano. El punto fijo se acostumbra a llamar **foco** y la recta fija **directriz.**

A la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, se llama **eje de simetría** de la parábola.

Sea Q, el punto de intersección entre el eje de simetría y la directriz de la parábola, entonces el punto medio entre el foco F y el punto Q pertenece a dicho lugar geométrico, dicho punto se llama **vértice** V de la parábola. $(fig.\,1)$



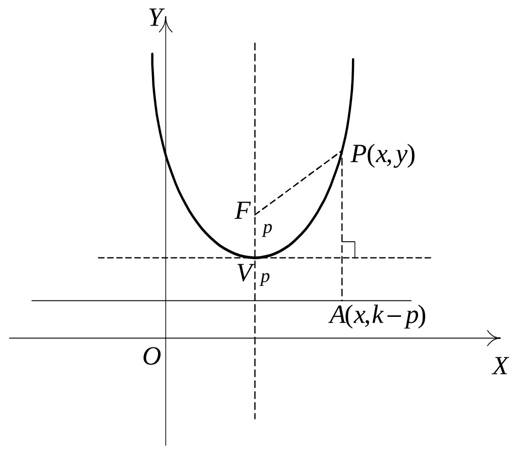
$fig.\,1$

Ecuación:

Sean: $ax + by + c = 0$ la ecuación de la directriz, $F(u, v)$ las coordenadas del foco $(F$ no esta sobre la directriz) y $P(x, y)$ un punto cualquiera que pertenece al $L.G.$ en cuestión, entonces de la definición se debe tener,

$$\frac{|\,ax + by + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

Para el caso particular en que las coordenadas del vértice sea $V(h,k)$ y el eje de simetría sea paralelo al eje Y, entonces se tendrán: $F(h,k+p)$ y la ecuación de la directriz $y = k - p$ con $p > 0$, así



$fig.\,2$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-k+p)^2}$$

$$(x-h)^2 + y^2 - 2y(k+p) + (k+p)^2 = y^2 - 2y(k-p) + (k-p)^2$$

de donde simplificando se obtiene

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (1)$$

esta es la ecuación canónica de una parábola cuyo vértice es $V(h,k)$ y eje de simetría paralelo al eje Y.

Si $h = k = 0$, resulta

$$x^2 = 4p\,y \qquad (2)$$

ecuación de una parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje Y.

Analogamente, si las coordenadas del vértice son: $V(h,k)$ y el eje de simetría sea paralelo al eje X, entonces se tendrán: $F(h+p,k)$ y la ecuación de la directriz $x = h - p$ con $p > 0$, la ecuación en cuestión resulta

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (3)$$

Si $h = k = 0$, resulta

$$y^2 = 4p\,x \qquad (4)$$

ecuación de una parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje X.

11.2 El trinomio de segundo grado.

Se llama trinomio (función) de segundo grado a:

$$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C,\ A \neq 0$$

vamos a mostrar, que esta ecuación representa a una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje Y o el mismo eje Y.

Completando cuadrados, se tiene

$$A(x^2 + \frac{B}{A}x) + C \ = y \ \Leftrightarrow \ A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A} + C = y \ \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{1}{A}[\, y - (C - \frac{B^2}{4A})],$$

comparando con la ecuación (1) se tiene : $h = \ -\frac{B}{2A},\ k = C - \frac{B^2}{4A},\ 4p = \frac{1}{A}$

de aquí $p = \frac{1}{4A}$ luego si $p > 0 \Leftrightarrow A > 0 \ \wedge \ p < 0 \Leftrightarrow A < 0$

coordenadas del vértice $V(-\frac{B}{2A}, C - \frac{B^2}{4A})$.

11.3 Tangencia.

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4p\,x$, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de ella es

$$y_0 y = 2p\,(x + x_0) \qquad (5)$$

En efecto, $P_0(x_0, y_0)$ pertenece a la parábola entonces $y_0^2 = 4p\,x_0$

sea $$y - y_0 = m(x - x_0)$$

la ecuación de la tangente en cuestión, entonces efectuando la intersección de esta tangente con la parábola resulta

$$[m(x - x_0) + y_0]^2 = 4p\,x \Leftrightarrow$$

$$m^2x^2 + (2my_0 - 2m^2x_0 - 4p)x + m^2x_0^2 \quad - 2mx_0y_0 + y_0^2 = 0$$

imponiendo la condición de tangencia $\Delta = 0$, resulta

$$(2my_0 - 2m^2x_0 - 4p)^2 - m^2(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2) = 0$$

de donde simplificando se llega a

$x_0 m^2 - y_0 m + p = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4p\,x_0}}{2x_0}$ pero $y_0^2 = 4p\,x_0$, entonces

$m = \dfrac{y_0}{2x_0}$, así la ecuación de la tangente resulta $y - y_0 = \dfrac{y_0}{2x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$

$2x_0 y = y_0(x + x_0)$ multiplicando por $\dfrac{y_0}{2x_0}$ se recibe $y_0 y = 2p\,(x + x_0)$.

Analogamente, para la familia de parábolas de la forma $x^2 = 4p\,y$ la ecuación de

la tangente en $P_0(x_0, y_0)$ es

$$x_0 x = 2p(y + y_0) \qquad (6)$$

Para los casos de

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \wedge \quad (x-h)^2 = 4p(y-k)$$

las ecuaciones de las tangentes en $P_0(x_0, y_0)$ son, respectívamente

$$(y_0 - k)(y - k) = 2p(x + x_0 - 2h) \qquad (7)$$

$$(x_0 - h)(x - h) = 2p(y + y_0 - 2k) \qquad (8)$$

11.4 Ecuación general

Desarrollando (1) y ordenando resulta

$$x^2 - 4py - 2hx + h^2 + 4pk = 0$$

que podemos escribirla como

$$x^2 + a_1 y + a_2 x + a_3 = 0 \qquad (10)$$

donde $a_1 = -4p$, $a_2 = -2h$, $a_3 = h^2 + 4pk$.

Recíprocamente, se puede demostrar que (10) representa al $L.G.$ de una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje Y.

La discusión de la ecuación (10) supone $a_1 \neq 0$.

Si es el caso que $a_1 = 0 \Rightarrow x^2 + a_2 x + a_3 = 0$, si las raíces de esta ecuación son reales y distintas, digamos r_1 y r_2 entonces $(x - r_1)(x - r_2) = 0$ y el $L.G.$ correspondiente consta de dos rectas diferentes $x = r_1$ y $x = r_2$.

Si las raíces son reales e iguales el $L.G.$ consta de dos rectas $x = r_1 = r_2$.

Si las raíces son complejas, no existe lugar geométrico.

Resumiendo una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (11)$$

Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa a una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje Y o coincide con el eje Y.

Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E = 0$, la ecuación representa dos rectas distintas paralelas al eje Y, dos rectas coincidentes paralelas al eje Y, o ningún lugar geométrico según que las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o bien complejas.

Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa a una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje X o coincide con el eje X.

Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D = 0$, la ecuación representa dos rectas distintas paralelas al eje X, dos rectas coincidentes paralelas al eje X, o ningún lugar geométrico según que las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o bien complejas.

11.5 Ejercicios Resueltos

1. Determine el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y la ecuación del eje de la parábola

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

Solución.

Completando cuadrados se obtiene $(x - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{8})$ de aquí se deducen:

$V(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$, $F(\frac{3}{4}, 0)$, ecuación de la directriz $y = -\frac{1}{4}$ y ecuación del eje $x = \frac{3}{4}$

2. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(8, -4)$ y $(3,1)$.

Solución.

Una forma es, suponiendo que la ecuación de la parábola mencionada es de la forma

$$x = ay^2 + by + c, \text{ con } a, b \text{ y } c \text{ por determinar}$$

imponiendo la condición, que pasa por los puntos $(0,0)$, $(8, -4)$ y $(3,1)$ se obtiene: $c = 0$, $16a - 4b + c = 8$ y $a + b + c = 3$ de donde resolviendo este sistema de tres ecuaciones resultan: $a = 1,\ b = 2$ y $c = 0$. Así la ecuación de la parábola pedida es

$$x = y^2 + 2y$$

3. Hallar las tangentes trazadas desde el punto $(1, 4)$ a la parábola cuya ecuación es

$$y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$$

Solución.

La ecuación de la tangente buscada es de la forma $y - 4 = m(x - 1) \qquad (1)$

efectuando la intersección con la parábola dada resulta

$$[m(x-1)+4]^2 + 3x - 6[m(x-1)+4] + 9 = 0$$

de donde ordenando, $m^2x^2 + (2m - 2m^2 + 3)x + m^2 - 2m + 1 = 0$

ahora imponiendo la condición de tangencia, $\Delta = 0 \Rightarrow$

$(2m - 2m^2 + 3)^2 - 4m^2(m^2 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow$

$m_1 = -\dfrac{1}{2},\ m_2 = \dfrac{3}{2}$. Así hay dos tangentes cuyas ecuaciones son:

$x + 2y - 9 = 0,\ \ 3x - 2y + 5 = 0$

4. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$.

a) Corta a la parábola en dos puntos diferentes.

b) Son tangentes a la parábola.

c) No cortan a la parábola

Solución.

Resolviendo el sistema formado por la parábola y recta se tiene,

$$y^2 - 2(-2y - k) + 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 10y + 2k + 9 = 0, \text{ Así:}$$

$$\Delta = 100 - 4(2k + 9) = 64 - 8, \text{ entonces}$$

a) $\Delta > 0 \Rightarrow 64 - 8k > 0 \Leftrightarrow k < 8$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow k = 8$

c) $\Delta < 0 \Rightarrow k > 8$

5. Dada la parábola

$$x^2 + 4x + 4y - 5 = 0$$

a) Determine las ecuaciones de las tangentes a la parábola, en los puntos de intersección de ella con el eje X.

b) Hallar las ecuaciónes de las tangentes a la parábola dada, trazadas desde el punto $(0,3)$.

Solución.

a) Primero determinamos las intersecciones de la parábola con el eje X, haciendo $y=0$ resulta $x^2+4x-5=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-5$ así los puntos son $P_1(1,0)$ y $P_2(-5,0)$, por otra parte

$$x^2+4x+4y-5=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=4(-1)(y-\frac{9}{4})$$

y sabemos que la tangente en $P_0(x_0,y_0)$ a la parábola $(x-h)^2=4p(y-k)$ esta dada por $(x_0-h)(x-h)=2p(y+y_0-2h)$ luego resultan para P_1 y P_2

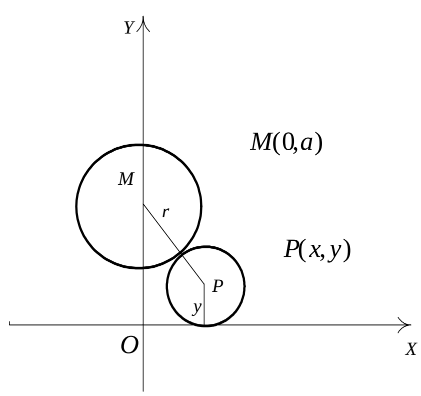
$$3x+2y-3=0 \text{ y } 3x-2y+15=0$$

b) Se resuelve como en el ejercicio 3. para luego obtener:

$$y=(\tfrac{\sqrt{7}}{2}-1)x+3 \text{ y } y=-(\tfrac{\sqrt{7}}{2}+1)x+3$$

6. Hallar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia variable, que es tangente : al eje X y a una circunferencia dada cuyo centro yace sobre el eje Y.

Solución.

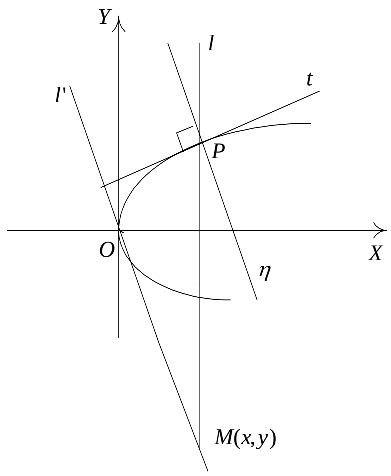


Sea la ecuación de la circunferencia dada, por: $x^2+(y-a)^2=r^2$, a y r conocidos y se supuso $a>r>0$.

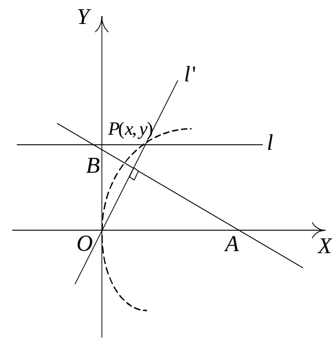
Condición del L.G. pedido, $PM=|y+r| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2-2ay+a^2}=|y+r|$

elevando al cuadrado se recibe $x^2=2(r+a)\,[y+\dfrac{r-a}{2}]$ que és la ecuación de una parábola de vértice $V(0,\dfrac{a-r}{2})$.

7. Por un punto P cualquiera de la parábola $y^2 = 2px$, se traza l, paralela al eje Y, y por el vértice de la parábola se traza l', paralela a la normal en P. Determine la ecuación del L.G. del punto de intersección de las dos rectas l y l', cuando P se mueve sobre la parábola. (P no puede ser el vértice)



$fig. ejer.\ 7$



$fig. ejer.\ 8$

Solución.

Sea $P(u,v)$, como P pertenece a la parábola $\Rightarrow$ $v^2 = 2pu \Rightarrow P(\frac{v^2}{2p}, v)$

La tangente en P, tiene por ecuación $vy = p(x + \frac{v^2}{2p})$, de aquí se obtiene la pendiente de la tangente que es $m_t = \frac{p}{v} \Rightarrow m_n = -\frac{v}{p} = m_{l'}$

luego la ecuación de l' es : $y = -\frac{v}{p}x$ y la de l es : $x = \frac{v^2}{2p}$; entre estas dos ecuaciones eliminando el parámetro se obtiene el L.G. del punto $M(x,y)$ que resulta ser $2x^3 = py^2$.

8. Por el punto $A(a,0)$ se traza una recta cualquiera l que corta al eje Y en B. Por B una paralela al eje X, que corta a la perpendicular a la recta AB trazada desde el origen, en un punto P. Encontrar la ecuación del L.G. de P cuando la recta l gire en torno al punto A.

Solución.

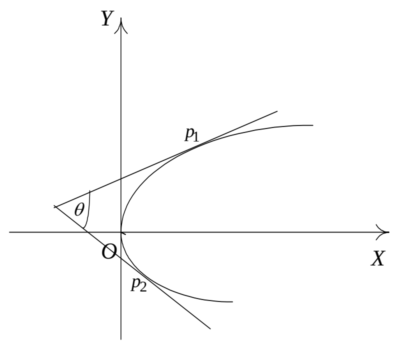
La familia de rectas por el punto $A(a,0)$, tiene por ecuación $y = m(x-a)$ intersecando con el eje Y resulta $B(0, -ma)$,

así la ecuación de la recta l es: $$y = -ma \qquad (1)$$

entonces la ecuación de la recta l' es: $\quad y = -\dfrac{1}{m}x, \; m \neq 0 \qquad (2)$

eliminando el parámetro m obtenemos el $L.G.$ de P, que resulta $y^2 = ax$ una parábola con vértice en el origen y foco $F\left(\dfrac{a}{4}, 0\right)$.

9. Encuentre la ecuación del $L.G.$ de los puntos desde donde se pueden trazar tangentes a la parábola $y^2 = 2px$, que forman entre si ángulo constante



Solución.

Ecuación de la tangente t_1 a la parábola en $P_1(x_1, y_1)$,

$$y_1 y = p(x + x_1) \Leftrightarrow \quad y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1} \Rightarrow m_1 = \frac{p}{y_1}$$

como P_1 pertenece a la parábola

$$y_1^2 = 2px_1 \Rightarrow \frac{p}{y_1} = \frac{y_1}{2x_1} = m_1 \Rightarrow \frac{x_1}{2y_1} = \frac{1}{2m_1}$$

Así resulta $\qquad y = m_1 x + \dfrac{p}{2m_1} \qquad (1)$

analogamente para t_2, resulta $\quad y = m_2 x + \dfrac{p}{2m_2} \qquad (2)$

restando miembro a miembro (1) y (2) y considerando $m_1 \neq m_2$ se obtiene $m_1 m_2 = \dfrac{p}{2x} \quad (3)$; ahora sumando (1) y (2) e introduciendo (3) se logra $m_1 + m_2 = \dfrac{y}{x} \quad (4)$,

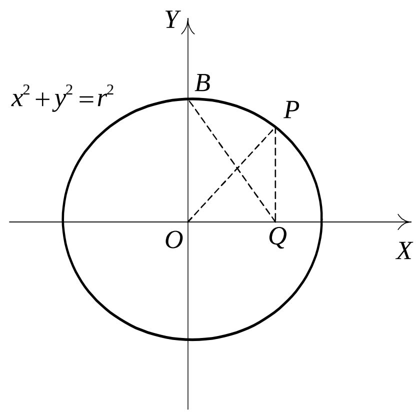
Por otra parte sea $k = tg\,\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Leftrightarrow m_2 - m_1 = k(1 + m_1 m_2)$

$\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} = k(1 + m_1 m_2)$, remplazando (3) y (4) resulta

$$\sqrt{(\frac{y}{x})^2 - 4\frac{p}{2x}} = k\left(1 + \frac{p}{2x}\right) \Leftrightarrow (\frac{y}{x})^2 - 4\frac{p}{2x} = k^2\left(1 + \frac{p}{2x}\right)^2$$

10. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ sea un punto P sobre ella en el primer o segundo cuadrante. Determine la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de las rectas OP y BQ cuando P recorre la circunferencia, donde Q es el pie de la perpendicular bajada desde P sobre el eje X, $B(0, r)$ y $O(0,0)$. Identifique y grafique el $L.G.$

Solución.



Sea $P(\lambda, \sqrt{r^2 - \lambda^2})$ el punto sobre la circunferencia, entonces $Q(\lambda, 0)$, λ parámetro variable distinto de 0 y de r,

La ecuación de la recta OP es $\quad y = \dfrac{\sqrt{r^2 - \lambda^2}}{\lambda} \qquad (1)$

La ecuación de la recta BQ es $\quad y - r = \dfrac{r}{-\lambda}\, x \qquad (2)$

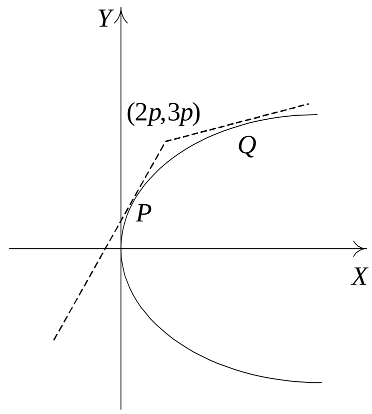
Eliminando el parámetro λ entre las ecuaciones (1) y (2) se obtendrá la ecuación del $L.G.$ del punto de intersección de ambas rectas,

De (2) : $\lambda = \dfrac{rx}{r - y}$ en (1) y simplificando se obtiene $x^2 = -2ry + r^2$

o bien $x^2 = -2r\left(y - \dfrac{r}{2}\right)$, parábola de vértice $V\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$ y foco $F(0,0)$.

11. Las tangentes en dos puntos P y Q de la parábola $y^2 = 4px$ se cortan en el punto $(2p, 3p)$. Determine las coordenadas de P y Q.

Solución.

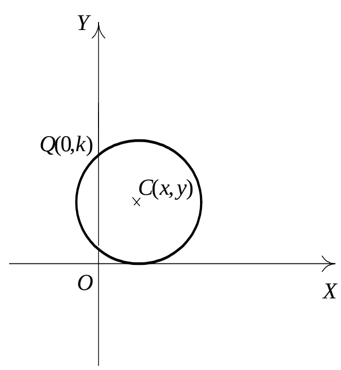


Sea $P(x_0, y_0)$, la ecuación de la tangente en P, es $y_0 y = 2p(x + x_0)$ la pendiente de esta tangente es $m = \dfrac{2p}{y_0}$ que debe ser igual a la pendiente entre P y el punto $(2p, 3p)$ es decir $m = \dfrac{3p - y_0}{2p - x_0}$ por tanto $\dfrac{2p}{y_0} = \dfrac{3p - y_0}{2p - x_0}$ de donde

$4p^2 - 2px_0 = 3py_0 + y_0^2$ $\quad (1)$, pero $y_0^2 = 4px_0$ puesto que P pertenece a la parábola, de aquí $x_0 = \dfrac{y_0^2}{4p}$ en (1) se recibe $y_0^2 - 6p\,y_0 + 8p^2 = 0$ cuyas raíces son: $4p$ y $2p$, y en consecuencia se obtiene para x_0, $4p$ y p respectivamente.

Así, los puntos en cuestión resultan: $P(p, 2p)$ y $Q(4p, 4p)$.

16. Hallar e identificar el lugar geométrico del centro de una circunferencia variable que pasa por un punto fijo y es tangente a una recta dada.



Solución.

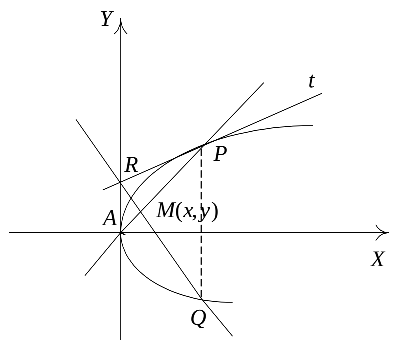
Sea $Q(0, k)$ el punto fijo sobre el eje Y, y sea el eje X la recta tangente a la circunferencia , luego $L.G.$ del centro $C(x, y)$ debe cumplir con

$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = y^2$, como el punto $Q(0, k)$ se encuentra sobre esta circunferencia, entonces

$$(0-x)^2+(k-y)^2=y^2 \Leftrightarrow x^2=2k(y-\frac{k}{2})$$

Se trata de una parábola cuyo vértice es $V(0,\,\frac{k}{2})$ y foco $F(0,k)$.

17. Un punto cualquiera P de una parábola se une con el vértice A de ella. La tangente en P corta a la tangente en A, en R, sea el punto Q simétrico de P con respecto al eje de la parábola. Determinar la ecuación del $L.G.$ del punto de intersección M de AP y RQ, en el caso que P se mueva sobre la parábola.



Solución.

Sea la ecuación de la parábola $y^2=2px$ con vértice A en el origen, así sea $P(x_0,y_0)$, como P pertenece a la parábola entonces

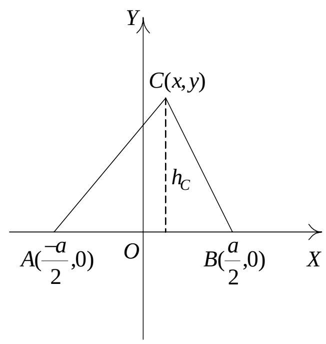
$$y_0^2=2px_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{y_0^2}{2p};\text{ luego } P(\frac{y_0^2}{2p},y_0) \text{ y } Q(\frac{y_0^2}{2p},-y_0)$$

Por otra parte la tangente en A, tiene por ecuación $x=0$ y la tangente en P $y_0y=p(x+\dfrac{y_0^2}{2p})$ intersecando estas ecuaciones resulta $R(0,\dfrac{y_0}{2})$, luego la ecuación de la recta RQ resulta $y=\dfrac{y_0}{2}-\dfrac{3p}{y_0}x$ $\quad(1)$

y la ecuación de la recta AP $\quad y=\dfrac{2p}{y_0}x$ $\quad(2)$

finalmente eliminando el parámetro y_0 entre (1) y (2) se obtiene el $L.G.$ de los puntos $M(x,y)$, que es $y^2=\frac{2}{5}px$, que es la ecuación de otra parábola.

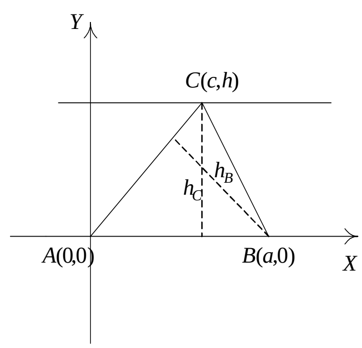
18. Identifique el lugar geométrico del vértice C de un triángulo, cuya base es $AB=a$. Sabiendo que la altura h_c es media proporcional geométrica entre la suma y diferencia de los lados AC y BC del triángulo.



Solución.

De inmediato se tiene, $h_c^2 = (AC + BC)(AC - BC) = AC^2 - BC^2 \Leftrightarrow$ $[(x + \frac{a}{2})^2 + y^2] - [(x - \frac{a}{2})^2 + y^2] = y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2ax,$ que es una parábola con vértice en el origen $V(0,0)$ y foco $F(\frac{a}{2}, 0)$.

20. Determinar la ecuación del lugar geométrico del ortocentro de un triángulo cuya base es constante lo mismo que la altura correspondiente.



Solución.

Sean la base $AB = a$ y $h_c = h$ constante la altura correspondiente, considerando a c como parámetro se tiene: $m_{AC} = \frac{h}{c} \Rightarrow m_{h_b} = -\frac{c}{h}$ entonces la ecuación de h_b es $y = -\frac{c}{h}(x - a)$ y la de h_c es $x = c$ eliminando el parámetro c entre estas dos últimas ecuaciones se obtiene el $L.G.$ pedido, es decir

$y = -\frac{x}{h}(x - a) \Leftrightarrow (x - \frac{a}{2})^2 = -h(y - \frac{a^2}{4h}),$ que es una parábola de vértice $V(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4h})$ y Foco $F(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4h} - \frac{h}{4})$.

11.6 Ejercicios Propuestos

1. Determine la ecuación del L.G. de los puntos (x, y) cuya distancia a la recta $y+3=0$ es igual a la distancia del punto $(-3,4)$. Identifique la curva y grafíquela.

   Solución.

   $x^2+6x-14y+16=0$

2. Dada la parábola

$$(y-1)^2=4(x+1)$$

   Determine k, de modo que la recta $y=2x+k$

   a) Corte a la parábola en dos puntos distintos

   b) Sea tangente a la parábola.

   Respuesta.

   a) $\triangle > 0 \Rightarrow k < \frac{7}{2}$

   b) $\triangle = 0 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$

3. Grafique las parábolas que se indican, indicando sus elementos principales

   a) $2x^2+y+8x+4=0$

   b) $y^2-2x-6y-1=0$

4. Determine la ecuación de una parábola cuyo eje de simetría es paralelo con el eje X y que pasa por los puntos $(-1,2)$, $(0,0)$ y $(6,4)$.

   Respuesta.

   $x=y^2-\dfrac{5}{2}y.$

5. Determine la ecuación de la parábola, si los puntos que pertenecen a ella equidistan de la recta $3x+4y=12$ y del punto $(-2,0)$. Indique sus elementos principales. Indicación: use la definición de parábola.

   Respuesta.

   $16x^2+9y^2-24xy+172x+96y-44=0$, $V(-\dfrac{23}{25},\dfrac{36}{25})$, $F(-2,0)$

   Ec. eje: $4x-3y+8=0$, Ec. directriz: $3x+4y-12=0.$

6. Determine la ecuación de la recta que pasa por el foco de la parábola $x^2+2y-4x-6=0$ y que es perpendicular a la recta $3x-2y-6=0$

   Respuesta.

   $4x+6y-35=0$

7. Determine las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2-4x+4y-4=0$ en los puntos de intersección con su lado recto.

   Respuesta.

   $x-y+1=0$; $x+y+5=0$

8. Determine k, de modo que el foco de la parábola $4\,y=(x+1)^2-2\,k$ se encuentre sobre : a) el eje X. b) la recta $2x+y=5$.

   Respuesta.

   a) $k=-2$. b) $k=12$.

9. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tal que su distancia al eje Y sea igual a su distancia al punto $(2,-3)$. Grafique.

   Respuesta.

   $y^2+6y-4x+13=0$

10. Una cuerda de la parábola $y^2-4x=0$ es un segmento de la recta $x-2y+3=0$. Hallar su longitud.

    Respuesta.

    $4\sqrt{5}$

11. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre si.

12. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2-2x+2y+3=0$ que es perpendicular a la recta $2x+y+7=0$.

    Respuesta.

    $k=-\dfrac{1}{2}$

13. Dada la ecuación de una parábola por

$$y^2-2\,y-2\,x-3=0$$

   a) Grafique la curva indicando: Coordenadas de su vértice y foco, ecuaciones de su eje de simetría y directriz.

   b) Determine la ecuación de la tangente a la curva en el punto de contacto de abscisa $x=0$ y ordenada positiva. Luego calcule el área del triángulo formado por la tangente y los ejes coordenados.

Respuesta.

a) $V(-2,1)$, $F(-\frac{3}{2},1)$, Ec. eje: $y=1$, Ec. directriz: $x=-\frac{5}{2}$.

b) $x-2y+6=0$; Área $=9$

14. a) Determine la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante, si la luz entre los extremos es de 150 m. y la distancia desde el vértice a la linea horizontal que une sus extremos, es 20 m.(los extremos se encuentran en la misma horizontal)

    b) Si la altura desde el vértice a una carretera horizontal que pasa por debajo del puente es de 15 m. Calcule la altura que hay desde la carretera a un punto del arco parabólico el cual se encuentra a 30 m. desde la vertical de uno de sus extremos

    Respuesta.

    Situando el origen del sistema de referencia en el extremo izquierdo, entonces

    a) $y=-\frac{4}{1125}x^2+\frac{24}{45}x$ b) $22.2\,\text{m}$.

15. Un proyectil se dispara bajo un ángulo de 45° con una velocidad inicial de 20 Km/min. Encontrar: a) Las ecuaciones paramétricas de su trayectoria. b) La ecuación cartesiana de dicha curva. c) El alcance máximo y la altura máxima que alcanza dicho proyectil.

    Respuesta.

    a) $x=10\sqrt{2}\,t$, $y=10\sqrt{2}\,t-\frac{9}{2}t^2$ b) $y=-\frac{9}{400}x^2+x$ c) $\frac{400}{9}$; $\frac{100}{9}$

16. Desde un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular a su eje de simetría. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

17. Demuestre que el $L.G.$ de los puntos medios de las cuerdas focales de una parábola, es otra parábola.

18. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P(a,b)$ de la parábola $(y-k)^2=4p(x-h)$ es igual a $|a-h+p|$.

19. Hallar e identificar el $L.G.$ de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $x+3=0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1,1)$.

Respuesta.

$y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$

20. Hallar el $L.G.$ del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y = 1$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Respuesta.

$x^2 - 4y - 4 = 0$; $x^2 + 8y - 16 = 0$

21. Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto $P_0(a,b)$ es: $bx + 2py = ab + 2pb$.

22. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$, que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

Respuesta.

$x + 3y - 2 = 0$

23. Desde el punto $(-1,1)$, se trazan dos tangentes a la parábola

$$y^2 - x + 4y + 6 = 0$$

Hallar el ángulo formado por estas tangentes.

Respuesta.

36° 2'

24. Hallar el ángulo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus puntos de intersección.

Respuesta.

63° 26'

25. Se han trazado dos círculos cada uno de los cuales tiene por diámetro una cuerda focal de una parábola. Demostrar que la cuerda común de los círculos pasa por el vértice de la parábola.

26. Una viga simplemente apoyada de longitud $l\,(\text{m.})$ está uniformemente cargada con q kg/m. En mecánica se demuestra que a una distancia de x m. del apoyo izquierdo, el momento flector M $(\text{kg} \cdot \text{m})$, esta dado por $M = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$. Demostrar que el momento flector es máximo en el centro de la viga y que su valor es $\frac{1}{8}ql^2$.

27. Entre dos torres de alta tensión que distan entre si 120 m., cuelga un cable en forma parabólica, se sabe que las dos torres tienen una altura de 30 m. c/u y que la segunda se encuentra en una cima de 10 m. de altura con respecto a la horizontal de la otra, además la altura que debe haber entre el cable y el suelo que se considera

horizontal (al mismo nivel de la primera torre) en el punto medio de la distancia que las separa es de 20 m.

a) Determine la ecuación del cable. b) ¿Cuál es la menor altura entre el suelo y el cable?

Respuesta.

a) Tomando el eje Y coincidente con la primera torre y el eje X con el suelo, se obtiene $y = \dfrac{1}{240}x^2 - \dfrac{5}{12}x + 30.$

b) 19.58 m.