Capítulo 4

Las Funciones Trigonométricas Inversas

4.1. Relaciones y sus inversas

Recordemos que una relación es un subconjunto de un producto cartesiano, es decir $R \subseteq A \times B$ o bien $R : A \longrightarrow B$, en tanto que su relación inversa $R^{-1} : B \longrightarrow A$, o bien

$$R^{-1} = \{(y, x) \, / \, (x, y) \in R\}$$

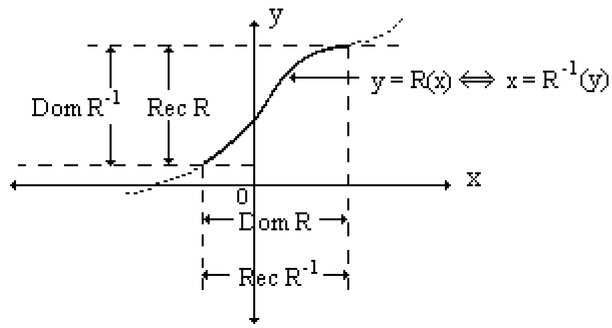
El gráfico de R esta dado por el conjunto de puntos

$$\{(x, y) \, / \, x \in DomR; \quad (x, y) \in R\}$$

y el de su relación inversa

$$\{(y, x) \, / \, y \in Dom\, R^{-1}; \quad (x, y) \in R\}$$

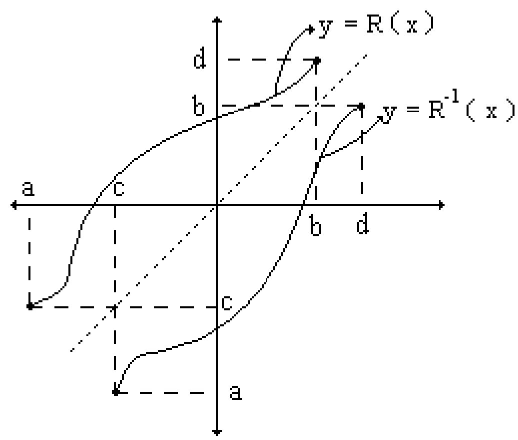
note que $\; Dom\, R = Rec\, R^{-1} \, \wedge \, Dom\, R^{-1} = Rec\, R \;$ ver gráfico



Conservando la variable x, siempre para el dominio y la variable y para el recorrido, tenemos

$$R^{-1} = \{(x, y) \,/\, x \in Dom\, R^{-1}; \quad (y, x) \in R\}$$

así $\;Dom\, R^{-1} \subseteq$ eje $X \;\wedge\; Rec\, R^{-1} \subseteq$ eje Y, por tanto gráficamente



Del gráfico se obtiene:

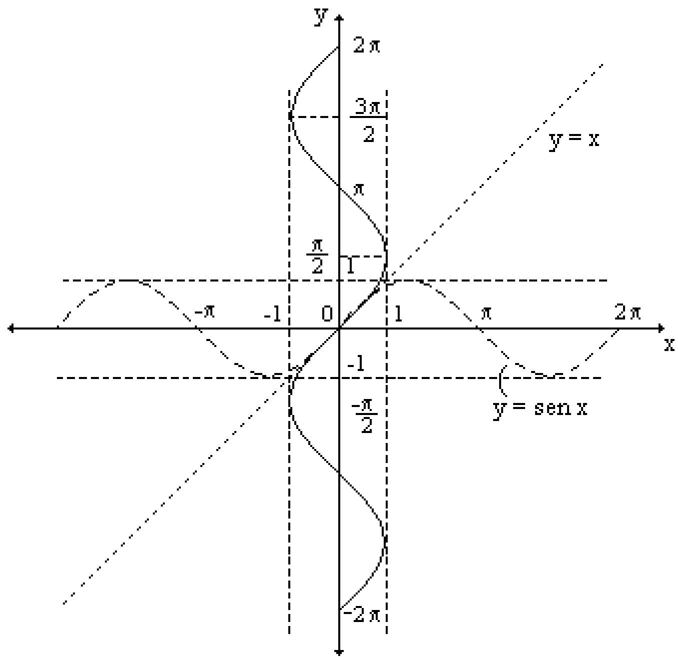
$$Dom\, R = Rec\, R^{-1} = [a, b]; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$Rec\, R = Dom\, R^{-1} = [c, d], \quad c, d \in \mathbb{R}$$

Por tanto los gráficos de R y R^{-1} son simétricos uno de otro con respecto a la recta bisectriz del 1er. cuadrante.

4.2. Gráfico de la Relación inversa del seno

En base a lo anterior podemos trazar la gráfica de la relación inversa de $y = sen\, x$ (haciendo la simetría con respecto a la recta $y = x$, del gráfico del seno)



De inmediato del gráfico confirmamos que se trata de una relación inversa y no de una función, pues $\forall\, x \in Dom\, R^{-1}$ existen varios y con $y \in \mathbb{R}$.

Notación

A la relación inversa del seno se acostumbra en denotar por: $y = Sen^{-1}x$ o bien $y = Arcsen\, x$ para ambos casos se tiene que $x = sen\, y$

Como $-1 \leq sen\, y \leq 1,\ \forall\, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow Dom\, R^{-1} = [-1, 1]$ y por tanto $Rec\, R^{-1} = \mathbb{R}$.

Pero nuestro fin es hablar de la función inversa del seno por tanto restringiendo el recorrido de la relación inversa del seno (o bien el dominio de la función seno), podemos obtener "funciones" inversas del seno según estos intervalos (o ramas) restringidas.

4.3. Definiciones de las funciones trigonométricas inversas y sus gráficos

Función inversa del seno

Se define la función inversa del seno en cualquier intervalo restringido, por:

$$f : [-1,1] \longrightarrow \left[(2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad k \in \mathbb{Z},\ \text{tal que}$$

$$y = f(x) = sen^{-1}x = arcsen\, x \Longleftrightarrow x = sen\, y.$$

Si $k=0$, $f : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; se acostumbra a llamar **intervalo principal** y se denotará por:

$$y = Sen^{-1}x = Arcsen\, x$$

Note que $Dom\, f = [-1,1]$ y $Rec\, f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Si $k \neq 0$, se acostumbra a llamar, inversa del seno en **un intervalo secundario**, que se denotará por $y = arcsen\, x = sen^{-1}x$.

Daremos a continuación algunas inversas del seno en un intervalo secundario

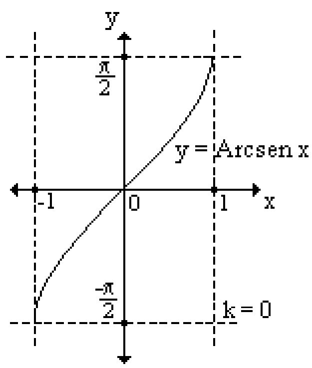
$$k=1, \quad f : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad f(x) = sen^{-1}x$$

$$k=2, \quad f : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \quad f(x) = sen^{-1}x$$

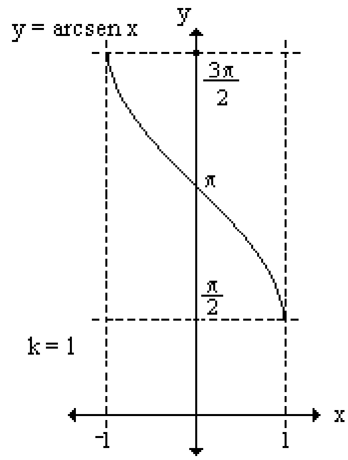
etc...

Observación

Una vez más notemos que el dominio de cualquier función inversa del seno es: $[-1,1]$ lo que cambia es su recorrido



función inversa del seno
en su intervalo principal



función inversa del seno
en uno de sus intervalos secundarios

Función inversa del coseno

Supóngase que hicimos las mismas consideraciones que para la inversa del seno, es decir el gráfico de su relación inversa y las rectricciones convenientes y necesarias.

Asi, definimos la función inversa del coseno en cualquier intervalo, por:

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [k\pi,\, (k+1)\pi], \quad k \in \mathbb{Z}, \text{tal que}$$

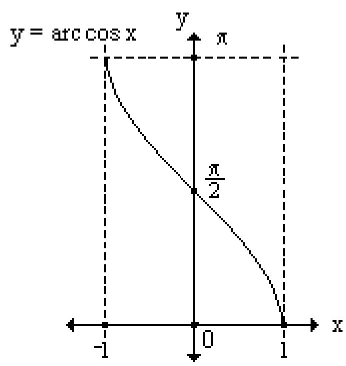
$$y = f(x) = cos^{-1}x = arccosx \Longleftrightarrow x = cos\, y$$

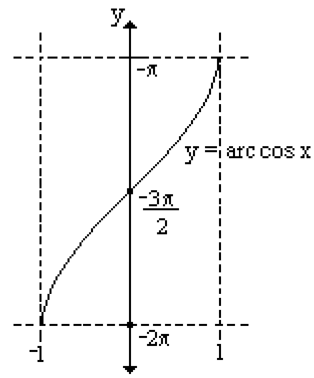
Si $k = 0,\ f : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, se llama inversa del coseno en su intervalo principal y se denotará por:

$$y = Cos^{-1}x = Arccosx$$

Notemos que $Dom\, f = [-1, 1]$ y $Rec\, f = [0, \pi]\ \forall k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$, se acostumbra a llamar, inversa de coseno en **un intervalo secundario**, que se denotará por $y = arccosx = cos^{-1}x$

Tambien igual que para la inversa del seno e dominio para cualquier función inversa del coseno es $[-1, 1]$ y su recorrido es el que varía.





función inversa del coseno
en su intervalo principal ($k = 0$)

función inversa del coseno
en uno de sus intervalos secundarios
($k = -2$)

Función inversa de la tangente

Se define la función inversa de la tangente en cualquier intervalo resringido por:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left((2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z} \text{ tal que}$$

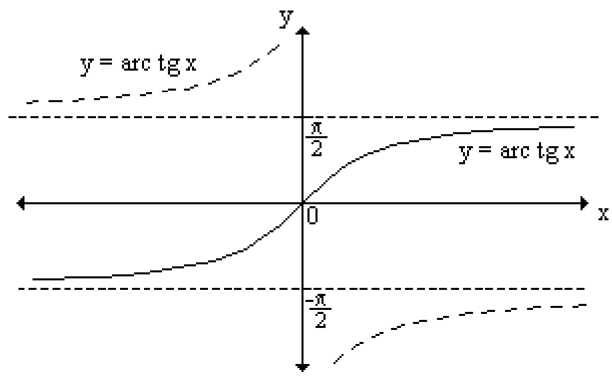
$$y = f(x) = tg^{-1}x = arctg\, x \Longleftrightarrow x = tg\, y$$

Si $k = 0$, $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $y = Tg^{-1}x = Arctgx$ se llama inversa de la tangente en **su intervalo principal**, nótese que $Dom\, f = \mathbb{R}$ y su $Rec\, f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ con $k \neq 0$, se tiene la que se acostumbra a llamar inversa de la tangente en uno de sus intervalos secundarios, que se denotará por:

$$y = arctg\, x = tg^{-1}x$$

Tal como para el caso de las anteriores inversas del seno y coseno, notemos que el dominio de cualquier inversa de la tangente es $\mathbb{R}$ y que su recorrido es el que va cambiando.



función inversa de la tangente en su intervalo principal

Funciones inversas de: la cosecante, secante y cotangente

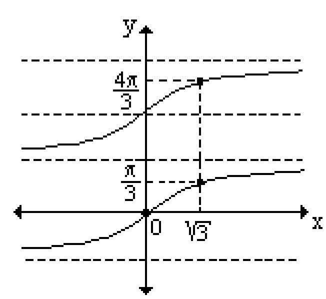
Se procede en forma similar, que para el caso de las anteriores, las que dejaremos para ud. y su estudio personal, en todo caso las encontrará en los libros de su bibliografía.

Observaciones

1. La afirmación por ejemplo:

$$arctgx + arctgx = 2\ arctgx$$

es falsa, pues para $x = \sqrt{3}$ si se toman los valores de $arctg\sqrt{3}$ en forma arbitraria



$$arctg\,\sqrt{3} + arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

de donde resultaría

$$\frac{5\pi}{3} = 2\,arctg\sqrt{3}$$

$$\Longleftrightarrow arctg\sqrt{3} = \frac{5\pi}{6} \Longleftrightarrow tg\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ lo que es falso}$$

Esto nos hace pensar que debemos tener cuidado cuando trabajemos con las relaciones inversas.

¿Cuales son los cuidados?, en este caso basta restringir el recorrido y considerar $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ el de la rama principal de la función inversa de la tangente, así pues entonces es verdadero que

$$Arctg\sqrt{3} + Arctg\sqrt{3} = 2\, Arctg\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$$

ya que: $Arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ es un valor único, por se $Arctgx$ una función bien definida. Naturalmente tambien es verdadera la proposición si se trata de la **misma** rama secundaria.

2. Notemos que las funciones: $Arcsenx$, $Arctgx$ y $Arccosecx$ son impares, es decir

$$\begin{aligned} &Arcsen(-x) = -Arcsenx \\ &Arccosec(-1) = -Arccosecx \\ &Arctg(-x) = -Arctgx \end{aligned}$$

3. Notemos que para el caso del **intervalo principal** para la función $Arccosecx$, se tiene

$$f : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$$

y que

$$cosec\, \alpha = \frac{1}{sen\, \alpha} = a, \qquad |a| \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$sen\, \alpha = \frac{1}{a}; \qquad a \neq 0$$

de donde $Arccosec\, \alpha = Arcsen\frac{1}{a} = sen^{-1}\frac{1}{a}$ razón por la cual $Arccosecx$ o $cosec^{-1}x$ no se encuentra en las calculadoras.

Análogamente para el caso del $Arcsec\, x$

$$f : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$Arcsec\, x = Arccos\frac{1}{a} = cos^{-1}\frac{1}{a}, \quad |a| \geq 1$$

Tambien para el $Arccotgx$, obsérvese que:

$$f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

$$Arccotga = Arctg\frac{1}{a},\ a > 0$$

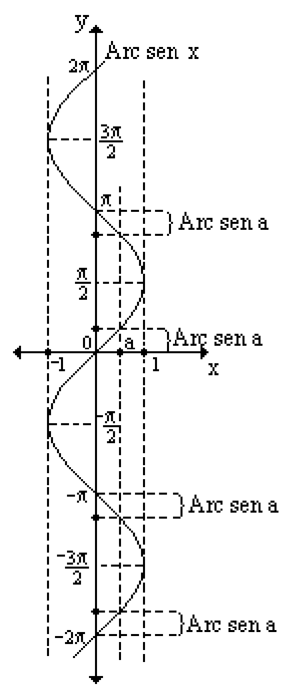
$$Arccotga = \pi + Arctg\frac{1}{a},\ a < 0$$

$$Arccotg0 = \frac{\pi}{2}$$

4.4. Resolución de ecuaciones trigonométricas

1.Ecuación de la forma

$$\mathbf{sen\, x = a}, \qquad |a| \leq 1$$



De la figura, notamos que los valores posibles de x, son infinitos todos los cuales se pueden representar por la fórmula

$$\mathbf{x = k\pi + (-1)^k\, Arcsen\, a}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

esta fórmula se llama solución general de la ecuación $senx = a$.

Note que $senx = a \iff x = Arcsena$ también nótese que si $|a| > 1$ no existe solución posible.

Ejemplo.

Resolver $sen\, 2x = -\dfrac{1}{2}$ de donde la solución general es $2x = k\pi + (-1)^k\, Arcsen\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\Longleftrightarrow 2x = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -Arcsen\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Longleftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} - (-1)^k\frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$$

2. Ecuación de la forma

$$\mathbf{cos\,x = b},\ |b| \leq 1$$

Tal como para el seno, se puede fundamentar con un gráfico adecuado (hágalo ud).

La solución general de esta ecuación esta dada por:

$$\mathbf{x = 2k}\,\pi \pm \mathbf{Arccos\,b},\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo.

Resolver: $cos(x+\pi) = \dfrac{1}{3}$

la solución general de esta ecuación es

$$x + \pi = 2\,k\pi \pm Arccos\left(\frac{1}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$Arccos\dfrac{1}{3} \simeq 1.23095$, de donde

$$x \simeq (2k-1)\pi \pm 1{,}23095\ (\text{rad}),\ k \in \mathbb{Z}$$

3. Ecuación de la forma

$$\mathbf{tg\,x = c},\ c \in \mathbb{R}$$

con la misma explicación que para las ecuaciones anteriores, la solución general de esta ecuación esta dada por

$$\mathbf{x = k}\pi + \mathbf{Arctg\,c},\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo.

Resolver $tg(\pi\, tg\, x) = 1$

Solución.

La solución general de inmediato es

$$\pi\, tg\, x = k\pi + Arctg 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi\, tg\, x = k\pi + \tfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow tg\, x = k + \tfrac{1}{4}$$

de donde $x = p\pi + Arctg\left(k + \frac{1}{4}\right);\ k, p \in \mathbb{Z}$

Nota La obtención de $Arcsen\, a, Arccos\, b$ y $Arctg\, c$ generalmente se efectúa con una calculadora ya sea en grados sexagesimales o bien en radianes.

4.5. Ecuaciones con funciones trigonométricas inversas

Como su nombre lo indica, estas ecuaciones contienen funciones trigonométricas inversas, hay que prevenir que al tomar funciones de ambos miembros de este tipo de ecuaciones, en general se aumenta el número de soluciones por lo que se debe verificar en las ecuaciones primitivas de dichas soluciones. También hay que agregar que estas ecuaciones en general no tienen fórmulas de solución general como las del anterior párrafo.

En resumen, en ejercicios con inversas, hay que preocuparse más que del dominio, del recorrido.

Ejemplo.

1. Resolver $Arccos\, x + Arcsen\, x = 0$

   Solución.

   $Arccos\, x = -Arcsen\, x$

   $Arccos\, x = Arcsen(-x)$

   sean $Arccos\, x = \alpha \Longleftrightarrow cos\, \alpha = x$

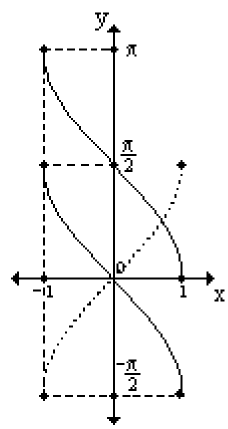
   y $Arcsen\,(-x) = \beta \Longleftrightarrow sen\, \beta = -x$

como: $\alpha = \beta \Longleftrightarrow cos\,\alpha = cos\,\beta$

$\Longleftrightarrow cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\beta} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{1 - x^2}$

$\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ pero notemos que ambos valores no satisfacen la ecuación por tanto ella carece de solución.

Observe que $Arccos\,x = -Arcsen\,x$ y gráficamente estas curvas $Arccos\,x$ y $-Arcsen\,x$ no tienen intersección; como era de esperar. (ver figura)



2. $Arctg\,x + Arctg(2 - x) + Arctg(3 - 2x) = \dfrac{3\pi}{4}$

Solución.

Sean

$$Arctg\,x = \alpha \Longleftrightarrow tg\,\alpha = x$$

$$Arctg(2 - x) = \beta \Longleftrightarrow tg\,\beta = 2 - x$$

$$Arctg(3 - 2x) = \gamma \Longleftrightarrow tg\,\gamma = 3 - 2x$$

luego como: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4} \Longleftrightarrow \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4} - \gamma$

$$\iff tg(\alpha+\beta) = tg\left(\frac{3\pi}{4}-\gamma\right) \iff \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta} = \frac{tg\frac{3\pi}{4} - tg\,\gamma}{1 + tg\frac{3\pi}{4}\; tg\,\gamma}$$

$$\iff \frac{x+(2-x)}{1-x(2-x)} = \frac{-1-(3-2x)}{1-(3-2x)} \iff 2x^3 - 8x^2 + 6x = 0$$

$$\iff 2x(x-1)(x-3) = 0 \iff x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 1 \text{ o } x_3 = 3$$

es fácil verificar que $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ son soluciones de la ecuación en cuanto $x_3 = 3$ no lo es pues

$$Arctg\,3 + Arctg(-1) + Arctg(-3) = -Arctg\,1 = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$$

4.6. Ejercicios resueltos

1. Determine el dominio de $y = Arcsen(2x-1)$ y resuelva la ecuación $y = \dfrac{\pi}{6}$ como tambien $arcsen(2x-1) = \dfrac{7\pi}{6}$

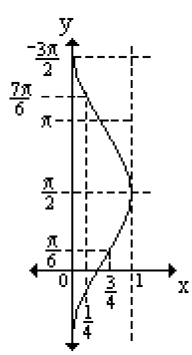
Solución.

$$Dom\,f \Longrightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1$$

$$y = \tfrac{\pi}{6} \Longrightarrow Arcsen(2x-1) = \tfrac{\pi}{6} \iff$$

$$2x-1 = sen\,\tfrac{\pi}{6} \iff 2x-1 = \tfrac{1}{2} \iff x = \tfrac{3}{4}$$

Notemos que el dominio de $arcsen(2x-1)$ tambien es $[0,1]$, estamos en una rama secundaria pues se pide resolver $arcsen(2x-1) = \frac{7\pi}{6}$, $\quad Rec\,f = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ asi $2x-1 = sen\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{4}$ ver figura



2. Demostrar que

   a) $2\,Arctg\dfrac{1}{4} = Arctg\,\dfrac{8}{15}$

   b) $Arccotg\,7 + Arccotg\,8 + Arccotg\,18 = Arccotg\,3$

   Demostración.

   a) Sea $Arctg\dfrac{1}{4} = \alpha \Longleftrightarrow tg\,\alpha = \dfrac{1}{4}$ por otra parte $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ de aquí

   $$tg\,2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15} \Longleftrightarrow 2\,\alpha = Arctg\frac{8}{15}$$

   pero $\alpha = Arctg\frac{1}{4} \Longrightarrow 2\,Arctg\frac{1}{4} = Arctg\frac{8}{15}$

   b) $\underbrace{Arccotg\,7 + Arccotg\,8} + Arccotg\,18 = Arccotg\,3$

   Sean $\begin{array}{l} Arccotg\,7 = \alpha \Longleftrightarrow cotg\,\alpha = 7 \\ Arccotg\,8 = \beta \Longleftrightarrow cotg\,\beta = 8 \end{array}$, así

   $cotg(\alpha + \beta) = \frac{cotg\,\alpha\; cotg\,\beta - 1}{cotg\,\beta + cotg\,\alpha} = \frac{7 \cdot 8 - 1}{8 + 7} = \frac{11}{3}$

   $\Longrightarrow \alpha + \beta = Arccotg\frac{11}{3}$, luego por demostrar que

   $Arccotg\,\frac{11}{3} + Arccotg\,18 = Arccotg\,3,$ análogamente sean

   $Arccotg\,\frac{11}{3} = \gamma \Longleftrightarrow cotg\,\gamma = \frac{11}{3}$

   $Arccotg\,18 = \delta \Longleftrightarrow cotg\,\delta = 18,$ así

   $cotg(\gamma + \delta) = \frac{\frac{11}{3} \cdot 18 - 1}{\frac{11}{3} + 18} = 3 \Longleftrightarrow \gamma + \delta = Arccotg\,3$

   luego $Arccotg\,7 + Arccotg\,8 + Arccotg\,18 = Arccotg\,3$

3. Resolver, las siguientes ecuaciones indicando su solución general:

   a) $cos\,x - sen\,2x = cos\,3x - sen\,4x$

   b) $tg\,x + tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right) = 3$

c) $cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $sen\, x - cos\, x + sen\, 3x = 0$

e) $cos\, x(sen\, x) = cos(cos\, x)$

f) $sen\, 3x = 8\, sen^3 x$

g) $tg\, x + tg\, 3x = tg\, 4x$

Solución.

a)

$$sen\, 4x - sen\, 2x = cos\, 3x - cos\, x$$

$$2\, cos 3x\ sen\, x = -2\, sen 2x\ sen\, x$$
$$\Longrightarrow sen\,(cos\, 3x + sen\, 2x) = 0 \Longleftrightarrow sen\, x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

o bien $cos\, 3x + sen\, 2x = 0 \Longleftrightarrow cos\, x(4\, cos^2 x - 3 + 2\, sen x) = 0$

$cos\, x = 0 \Longleftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$ o bien

$$4\, cos^2 x - 3 + 2\, sen x = 0 \Longleftrightarrow 4\, sen^2 x - 2\, sen x - 1 = 0$$

$$sen\, x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{4} \Longleftrightarrow x = k\pi + (-1)^k\, Arcsen\tfrac{1+\sqrt{5}}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x = k\pi + (-1)^k \tfrac{3\pi}{10},\ k \in \mathbb{Z}$$

b)

$$tg\, x + tg\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\left(\tfrac{3\pi}{4} + x\right) = 3$$

$$tg\, x + \tfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x} + \tfrac{-1 - tg\, x}{1 + tg\, x} = 3 \Longleftrightarrow tg^2 x - 2tg\, x - 3 = 0$$

de aquí $tg\, x = 3$ o $tg\, x = 1$ (no dá solución)

$$\Updownarrow$$

$$x = k\pi + Arctg 3,\ k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = k\pi + 1.2490458,\ k \in \mathbb{Z}$$

c)

$$cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Longleftrightarrow sen\,4x\;sen\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

de aquí;

$$sen\,4x=0 \Longleftrightarrow 4x=k\pi \Longleftrightarrow x=k\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$sen\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Longleftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi \Longleftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$$

d)

$$sen\,x-cos\,x+sen\,3x=0$$

$$sen\,x+sen\,3x-cos\,x=0 \Longleftrightarrow 2\,sen\,2x\;cos\,x-cos\;x=0$$

$$cos\,x(2\;sen2x-1)=0 \Longleftrightarrow cos\,x=0 \text{ o } sen\,2x=\frac{1}{2}$$
$$cos\,x=0 \Longleftrightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$sen\,2x=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2x=k\pi+(-1)^k\,Arcsen\frac{1}{2}=k\in+(-1)^k\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

e)

$$cos(sen\,x)=cos(cos\,x)$$

$$cos(sen\,x)-cos(cos\,x)=0$$

$$2\,sen\left[\frac{1}{2}(sen\,x+cos\,x)\right]\;sen\left[\frac{1}{2}(sen\,x-cos\,x)\right]=0$$

De aquí: $sen\frac{1}{2}(sen\,x+cos\,x)=0$ o $sen\frac{1}{2}(sen\,x-cos\,x)=0$

$$\frac{1}{2}(sen\,x+cos\,x)=k_1\pi,\ k_1\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,cos\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}sen\,x=\frac{2k_1\pi}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2k_1\pi}{\sqrt{2}}$$

$x - \frac{\pi}{4} = 2k_2\pi \pm Arccos\left(\frac{2k_1\pi}{\sqrt{2}}\right),\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$

ecuación que sólo se sostiene para $k_1 = 0$ y $Arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

luego $x = 2k_2\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2},\ k_2 \in \mathbb{Z},$ análogamente de

$sen\frac{1}{2}(sen\, x - cos\, x) = 0 \Longleftrightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2k_3\pi}{\sqrt{2}},\ k_3 \in \mathbb{Z}$

$x - \frac{\pi}{4} = k_4\pi + (-1)^{k_4} Arcsen\left(\frac{2k_2\pi}{\sqrt{2}}\right),$ sólo para $k_3 = 0$

y en éste caso $x = k_4\pi + \frac{\pi}{4},\ k_4 \in \mathbb{Z}$

f)

$sen\, 3x = 8\, sen^3 x$

$3\, sen x - 4\, sen^3 x = 8\, sen^3 x \Longleftrightarrow 3\, sen x(1 - 4\, sen^2 x) = 0$

$sen\, x = 0$ o bien $1 - 4\, sen^2 x = 0$ de donde

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ o bien $x = k\pi + (-1)^k \left(\pm\frac{\pi}{6}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

g)

$tg\, x + tg\, 3x = tg\, 4x$

como: $tg\, x + tg\, 3x = tg\, 4x(1 - tg\, x\; tg\, 3x)$ resulta
$-tg\, x\; tg\, 3x\; tg\, 4x = 0,$ de donde

$tg\, x = 0$ o $tg\, 3x = 0$ o $tg\, 4x = 0$

de aquí: $x = k\pi$ o $x = k\frac{\pi}{3}$ o $x = k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$

4. Resolver

$$sen(2\, Arcos(cotg(2\, Arctg\, x))) = 0$$

Solución.

De inmediato $2\, Arccos(cotg(2\, Arctgx)) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$cotg(2\,Arctg\,x) = cos\left(\frac{k\pi}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}$

pero $cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$ si k es impar

y $cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ si k es impar, por tanto

si k es impar, $k\in\mathbb{Z} \Longrightarrow cotg(2\,Arctg\,x) = 0$

$\Longleftrightarrow 2\,Arctg\,x = p\pi + \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = tg\left(p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\ p\in\mathbb{Z}$

Si k es par, $k\in\mathbb{Z} \Longrightarrow cotg(2\,Arctg\,x) = \pm 1$

$\Longleftrightarrow 2\,Arctg\,x = p\pi \pm \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow x = tg\left(p\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right),\ p\in\mathbb{Z}$

5. Demostrar

   a) $Arctg\,x + Arctg\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x>0$

   b) $Arctg\,x + Arctg\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x<0$

   c) $Arctg\,x + Arccotg\,x = \dfrac{\pi}{2},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

Demostración.

a) Sea $x>0 \Longrightarrow 0 < Arctg\,x < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -Arctg\,x < 0$ de donde $0 < \frac{\pi}{2} - Arctg\,x < \frac{\pi}{2}$,

como $tg(Arctg\,x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{tg(Arctg\,x)} = cotg(Arctg\,x)$

$\frac{1}{x} = tg\left(\frac{\pi}{2} - Arctg\,x\right) \Longleftrightarrow Arctg\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - Arctg\,x$

b) Si $x<0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} < Arctg\,x < 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - Arctg\,x < 0 \qquad (*)$
y como $Arctg\frac{1}{x} = Arctg\left(tg(\frac{\pi}{2} - Arctg\,x)\right) = \frac{\pi}{2} - Arctg\,x - \pi$ se resta $(-\pi)$ pues de $(*)\,\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - Arctg\,x < \pi$, por tanto $Arctg\,x + Arctg\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},\ \forall x<0$

c)

Si $x > 0$ $Arccotg\, x = Arctg \frac{1}{x}$ por (a) se tiene lo pedido

si $x < 0$ $Arccotg\, x = \pi + Arctg \frac{1}{a}$ luego por (b)

$Arctg\, x + Arccotg\, x - \pi = -\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow Arctg\, x + Arccotg\, x = \frac{\pi}{2}$

si $x = 0$ la igualdad es trivial.

6. Resolver

$$Arccotg \frac{x^2-1}{2x} + Arctg \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2\pi}{3}$$

Solución.

aplicando el ejercicio anterior parte c), se tiene:

$Arccotg \frac{x^2-1}{2x} = Arctg \frac{2x}{x^2-1}$ si $\frac{x^2-1}{2x} > 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$

en cuyo caso $2\, Arctg \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2\pi}{3} \Longleftrightarrow Arctg \frac{2x}{x^2-1} = \frac{\pi}{3}$

$\frac{2x}{x^2-1} = \sqrt{3} \Longleftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3}$ o $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ambas soluciones sirven pues: $-1 < -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ y $\sqrt{3} > 1$

ahora $Arccotg \frac{x^2-1}{2x} = \pi + Arctg \frac{2x}{x^2-1}$ si $\frac{x^2-1}{2x} < 0 \Longleftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1$

si: $\pi + Arctg \frac{2x}{x^2-1} + Arctg \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2\pi}{3} \Longleftrightarrow Arctg \frac{2x}{x^2-1} = -\frac{\pi}{6}$ de donde

$x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 2 - \sqrt{3}$ o $x = -(2+\sqrt{3})$, tambien ambos

son soluciones pues: $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ y $-(2+\sqrt{3}) < -1$

7. Demostrar $Arctg\, a + Arctg\, b = Arctg \dfrac{a+b}{1-ab}$ si $ab < 1$

Demostración.

Primero notemos que

$tg(Arctg\, a + Arctg\, b) = \frac{tg(Arctg\, a) + tg(Arctg\, b)}{1 - tg(Arctg\, a) tg(Arctg\, b)} \Longleftrightarrow$

$Arctg\, a + Arctg\, b = Arctg \frac{a+b}{1-ab}$ relación que sólo es válida si y sólo si: $-\frac{\pi}{2} < Arctg\, a + Arctg\, b < \frac{\pi}{2}$ que es lo que haremos ver bajo la hipótesis dada que $ab < 1$

Caso 1 Supongamos $a \geq 0 \wedge b \leq 0 \Longrightarrow$

$0 \leq Arctg\, a < \frac{\pi}{2} \;\wedge\; -\frac{\pi}{2} < Arctg\, b \leq 0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} < Arctg\, a + Arctg\, b < \frac{\pi}{2}$

análogamente para $a \leq 0 \wedge b \geq 0$

Caso 2 Si $a > 0 \wedge b > 0$ como $ab < 1 \Longleftrightarrow a < \frac{1}{b} \Longleftrightarrow Arctg\, a < Arctg \frac{1}{b}$ pues $Arctg$ es creciente $Arctg\, a < Arctg \frac{1}{b} = \frac{\pi}{2} - Arctg\, b$, por ejercicio 5 luego $0 < Arctg\, a + Arctg\, b < \frac{\pi}{2}$

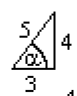
Caso 3 Si $a < 0 \wedge b < 0$ propuesto para ud.

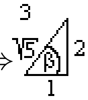
8. Demostrar que

$$Arccos \frac{3}{5} + Arcsen \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi - Arctg\, 2$$

Demostración.

Sean

$Arccos \frac{3}{5} = \alpha \Leftrightarrow cos\, \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$ 

$Arcsen \frac{2}{\sqrt{5}} = \beta \Leftrightarrow sen\, \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ 

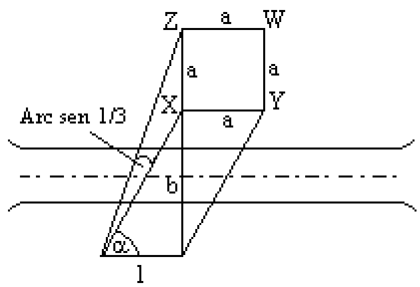
$cotg(\alpha + \beta) = \frac{cotg\, \alpha\; cotg\, \beta - 1}{cotg\, \beta + cotg\, \alpha} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$

$\alpha + \beta = Arccotg \left(-\frac{1}{2}\right)$, pero $Arccotg \left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + Arctg(-2)$

luego $\quad Arccos \frac{3}{5} + Arcsen \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi - Arctg\, 2$

9. Un terreno de forma cuadrada $xyzw$, tiene los lados de su base xy y zw, paralelas a un autopista. Un observador que se encuentra en la calzada más lejana del terreno en la misma linea que el lado xz, halla que el lado xy subtiende a su vista un ángulo 45° y despúes de caminar l m por la calzada, alejándose del terreno, halla que xz subtiende un ángulo cuyo seno es $\frac{1}{3}$. Demuestre que la longitud de cada lado del terreno es: $\frac{1}{\sqrt{2}}\,l$

   Demostración.

   De la figura $tg\,45^\circ = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow a = b$

   $tg(\alpha + Arcsen\frac{1}{3}) = \frac{a+b}{l}$

   $\frac{tg\,\alpha + tg(Arcsen\frac{1}{3})}{1 - tg\,\alpha\, tg(Arcsen\frac{1}{3})} = \frac{2a}{l}$, pero $tg\,\alpha = \frac{a}{l}$

   $tg(Arcsen\frac{1}{3}) = tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$ en que $sen\,\theta = \frac{1}{3}$

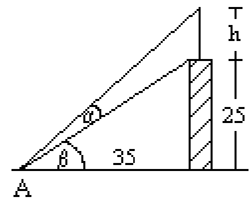
   $tg(Arcsen\frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, por tanto

   $\frac{a}{l} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2a}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Longleftrightarrow 2a^2 - 2\sqrt{2}l\,a + l^2 = 0$

   $\Longleftrightarrow (\sqrt{2}\,a - l)^2 = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l.$

10. Una antena colocada verticalmente en la punta de una torre de 25 m de altura, subtiende un ángulo igual al $Arccos$ 0.995 desde un punto A a 35 m. de la base de la torre. Calcular la altura de la antena.

Solución.



$tg\,\beta = \frac{25}{35} = \frac{5}{7},\ tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta} = \frac{h+25}{35}$

$\alpha = Arccos 0.995 \Longrightarrow cos\,\alpha = 0.995 \Longrightarrow tg\,\alpha \simeq \frac{1}{10},$ así

$\frac{\frac{1}{10}+\frac{5}{7}}{1-\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{7}} = \frac{h+25}{35} \Longrightarrow h = 5.69$ m

11. Demostrar $\forall\, x$ e $y \in \mathbb{R}$, con x e $y \neq -1$

$$Arctg\frac{1-x}{1+x} - Arctg\frac{1-y}{1+y} = Arcsen\left(\frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right)$$

Demostración.

Note previamente que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, con $x, y \neq -1$

$(xy+1)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2y^2 + 1 \geq -2xy \Longleftrightarrow$

$y^2 - 2xy + x^2 \leq 1 + y^2 + x^2 + x^2y^2 \Longleftrightarrow (y-x)^2 \leq (1+x^2)(1+y^2)$

$|y-x| \leq \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}} \leq 1$

ahora bien sean

$Arctg\frac{1-x}{1+x} = \alpha \Longleftrightarrow tg\,\alpha = \frac{1-x}{1+x}$

$Arctg\frac{1-y}{1+y} = \beta \Longleftrightarrow tg\,\beta = \frac{1-y}{1+y}$

sean

$la = \sqrt{(1+x)^2 + (1-x)^2}$

$b = \sqrt{(1+y)^2 + (1-y)^2}$

y como $sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\; cos\,\beta - cos\,\alpha\; sen\,\beta$

$sen(\alpha-\beta) = \frac{(1-x)}{a}\frac{(1+y)}{b} - \frac{(1-y)}{b}\frac{(1+x)}{a}$
$sen(\alpha-\beta) = \frac{1+y-x-xy-1-x+y+xy}{ab} = \frac{2(y-x)}{\sqrt{(2+2x^2)(2+2y^2)}}$

$\alpha-\beta = Arcsen\frac{y-x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$, luego

$Arctg\frac{1-x}{1+x} - Arctg\frac{1-y}{1+y} = Arcsen\frac{y-x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$

12. Resolver $2\,Arctg(cos\,x) = Arctg(2\,cosec\,x)$

Solución.

Sean
$Arctg(cos\,x) = \alpha \Longleftrightarrow tg\,\alpha = cos\,x$

$Arctg(2cosec\,x) = \beta \Longleftrightarrow tg\,\beta = 2\,cosec\,x$
como $2\alpha = \beta \Longleftrightarrow tg\,2\alpha = tg\,\beta \Longleftrightarrow \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg\,\beta$

$\Longleftrightarrow \frac{2\,cosx}{1-cos^2\,x} = 2\,cosec\,x \Longleftrightarrow \frac{cos\,x}{sen^2x} = \frac{1}{sen\,x}$

note que $sen\,x$ debe ser distinto de 0, entonces se llega a $tg\,x = 1 \Longleftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$

13. Si $Arcsen\,x + Arcsen\,y + Arcsen\,z = \dfrac{\pi}{2}$ demuestre que: $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$

Demostración.

Sean
$Arcsen\,x = \alpha \Longleftrightarrow sen\,\alpha = x$

$Arcsen\,y = \beta \Longleftrightarrow sen\,\beta = y$

$Arcsen\,z = \gamma \Longleftrightarrow sen\,\gamma = z$

luego como: $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$cos(\alpha+\beta) = sen\,\gamma \Longleftrightarrow cos\,\alpha\; cos\,\beta - sen\,\alpha\; sen\,\beta = sen\,\gamma$

$$cos^2\alpha\ cos^2\beta = sen^2\gamma + 2\,sen\,\alpha\ sen\,\beta\ sen\,\gamma + sen^2\alpha\ sen^2\,\beta$$

$$(1 - sen^2\alpha)(1 - sen^2\beta) = sen^2\gamma + 2\,sen\,\alpha\ sen\,\beta\ sen\,\gamma + sen^2\alpha\ sen^2\,\beta$$

$$sen^2\alpha + sen^2\beta + sen^2\gamma + 2\,sen\,\alpha\ sen\,\beta\ sen\,\gamma = 1 \Longleftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

14. Resolver

i) $\dfrac{1}{2}sen\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = sen\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{3}{2}x\right)\ cos\left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

ii) $sen\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\ cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right) = cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\ sen\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right)$

Solución.

i)

$$sen\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) = 2\,sen\left(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{3}{2}x\right)\ cos\left(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{3}{2}x\right)$$

$$sen\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) - sen\left(\tfrac{\pi}{3} - 3x\right) = 0$$

$$2\ cos\left(\tfrac{\pi}{3} - x\right)\ sen\,2x = 0 \Longrightarrow$$

$$sen\,2x = 0 \Longrightarrow 2x = k\pi \Longrightarrow x = k\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) = 0 \Longrightarrow x - \tfrac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \tfrac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 2k\pi \pm \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

ii)

$$sen\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right) cos\left(\tfrac{\pi}{3} + 2x\right) - cos\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right) sen\left(\tfrac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$sen\left(\tfrac{\pi}{4} - x - \left(\tfrac{\pi}{3} + 2x\right)\right) = 0 \Longleftrightarrow sen\left(-\tfrac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow sen\left(3x + \tfrac{\pi}{12}\right) = 0 \Longleftrightarrow 3x + \tfrac{\pi}{12} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$$

$$x = k\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{36},\ k \in \mathbb{Z}.$$

4.7. Ejercicios Propuestos

1. Determine el dominio de $y = arccos(2x - x^2)$ y resuelva $y = 0$ e $y = \dfrac{\pi}{3}$

Respuesta.

$[1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}]; \quad x=1; \quad x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. Demostrar

   a) $3\,Arctg\dfrac{1}{4}=Arctg\dfrac{47}{52}$

   b) $Arctg\dfrac{1}{2}+Arctg\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$

   c) $Arccos\dfrac{12}{13}+Arctg\dfrac{1}{4}=Arctg\dfrac{43}{32}$

   d) $Arccos\dfrac{63}{65}+2\,Arccotg5=Arcsen\dfrac{3}{5}$

   e) $Arcsen\dfrac{1}{3}+Arcsen\dfrac{1}{3\sqrt{11}}+Arcsen\dfrac{3}{\sqrt{11}}=\dfrac{\pi}{2}$

3. Demostrar que

   a) $Arcsen\,x+Arcsen\,y=Arcsen(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ si $xy\leq 0$ o $x^2+y^2\leq 1$

   b) $Arctg\dfrac{4}{3}+Arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\pi+Arctg\dfrac{1}{2}$

   c) $Arccotg(tg\,2x)+Arccotg(-tg\,3x)=x$

   d) $tg(2\,Arctg\,x)=2tg(Arctg\,x+Arctg\,x^3)$

   e) $cos\{Arctg[sen(Arctg\,x)]\}=\left(\dfrac{x^2+1}{1+2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

4. Si $-1\leq x\leq 1$ demuestre que

   a) $Arcsen\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}+Arccos\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}=Arccotg\dfrac{1-2x^2}{2x\sqrt{1-x^2}+1}$

   b) $Arcsen\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+Arccos\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$

5. Resolver, las siguientes ecuaciones, indicando su solución general

   a) $cosx+cos\,2x+cos\,3x=0$

b) $cos^2 2x + 3\,sen\,2x - 3 = 0$

c) $sen\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$

d) $\dfrac{sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} - tg\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + tg\,x = 0$

e) $sen(x - \alpha) = cos(x + \alpha)$, α ángulo dado fijo.

f) $2\,cotg\dfrac{x}{2} = cotg^2 x(2\,tg\,x + sec^2 x)$

g) $tg^3 x + cotg^3 x = 8cosec^3 2x + 12$

h) $-tg\,x + tg\,3x = 2\,tg\,2x$

i) $cosec^3 x - 2cotg^2 x = 2$

j) $sen\,7x + sen\,3x = 2\,sen\,5x$

Respuesta.

a) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ o $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

b) $k\frac{\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$

c) $(2k+1)\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ o $2\,k\pi + \frac{\pi}{6}$

d) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

e) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ $\forall \alpha \neq \frac{3\pi}{4}$ y $\alpha \neq -\frac{\pi}{4}$ si $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ o $\alpha = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

f) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$

g) $k\frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12}$

h) $k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$ o $x = k\pi$

i) $k_\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$

j) $k\pi$ o $k\frac{\pi}{5}$

6. Resolver $cos(2\,Arctg(sen(2\,Arccotg\,x))) = 0$

Respuesta.

$x = \pm 1$

7. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $Arcsen\,x = Arccos(-x)$

b) $Arccotg\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1}{2}\,Arctg\,x,\ x \neq 1$

c) $2\,Arccotg\,2 + Arcsen\dfrac{4}{5} = Arcsen\dfrac{1}{x}$

d) $Arctg\dfrac{x-1}{x+1} + Arctg\dfrac{2x-1}{2x+1} = Arctg\dfrac{23}{36}$

e) $2\,Arccotg(sen\,x) = Arctg(2\,sec\,x) \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Respuesta.

a) No tiene solución b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{25}{24}$ e)$-\frac{\pi}{4}$

8. Si $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $x = Arccotg\,\sqrt{cos\,\alpha} - Arctg\sqrt{cos\,\alpha}$ demuestre $x = Arcsen\left(tg^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

9. Si $Arccos\,x + Arccos\,y + Arccos\,z = \pi$ demostar $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$