

# Capítulo 2

## Razones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo

En este capítulo el ángulo  $\alpha$  que aparezca debe satisfacer:

$$0 < \alpha < 90^\circ \quad \text{ó} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

### 2.1. Definiciones

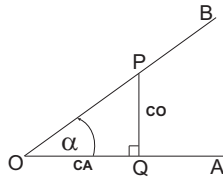


Figura 3

Sea el ángulo  $AOB$  de medida  $\alpha$  y tracemos una perpendicular  $PQ$  al lado  $OA$ , formándose así un triángulo rectángulo  $OPQ$  (Figura 3).

A  $OQ$  y  $PQ$  se les acostumbra llamar catetos y a  $OP$  la hipotenusa.

Se definen las razones trigonométricas como

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{PQ}{OP}, \quad \text{seno de } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{OQ}{OP} \quad (\text{coseno de } \alpha)$$

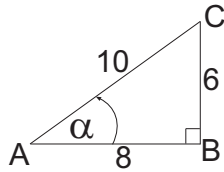
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{PQ}{OQ} \quad (\text{tangente de } \alpha)$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{OQ}{PQ} \quad (\text{cotangente de } \alpha)$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{OP}{OQ} \quad (\text{secante de } \alpha)$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{OP}{PQ} \quad (\text{cosecante de } \alpha)$$

**Ejemplo.**



Sea el triángulo  $ABC$  rectángulo en  $B$ . Sea sus catetos  $AB=8\text{cm}$  y  $BC=6\text{cm}$ .

Notemos de inmediato que la hipotenusa mide 10cm pues:  $8^2 + 6^2 = 10^2$ , así:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad \operatorname{cos} \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75 \dots \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{8}{6} = 1,33$$

$$\sec \alpha = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25 \dots \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1,66$$

## 2.2. Observaciones

1.

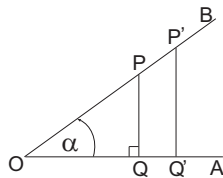


Figura 4

Sea  $P'Q'$  una perpendicular a  $OA$ , distinta a  $PQ$  (Figura 4). Demostraremos que la razón seno no varía.

De la geometría elemental

$\triangle OPQ \sim \triangle OP'Q'$ , por tanto

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'} \quad , \text{de aquí que}$$

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$  relación que establece que es indiferente usar  $PQ$  o  $P'Q'$ , puesto que se obtiene el mismo valor para  $\operatorname{sen} \alpha$ .

2. (Tarea para ud.)

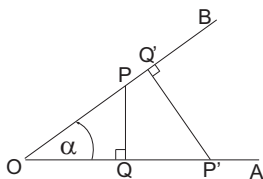


Figura 5

Si consideramos una perpendicular al lado  $OB$  en vez de una perpendicular al lado  $OA$  (Figura 5). Demuestre usted que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

Análogamente se establecen situaciones similares para el resto de las razones trigonométricas.

En resumen, dado un ángulo agudo positivo  $\alpha$ , existe un y sólo un valor para  $\operatorname{sen} \alpha$  (respectivamente para:  $\operatorname{cos} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\dots$ ). Se trata de una función con dominio en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  y recorrido algún subconjunto de  $\mathbb{R}$ , este concepto lo abordaremos con propiedad más adelante.

### 2.3. Propiedades

Sin caer en error alguno, usaremos la palabra razón trigonométrica o bien función trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

De las definiciones anteriores se sigue que:

1.  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{sec} \alpha$ ,  $\operatorname{cosec} \alpha$  y  $\operatorname{cotg} \alpha > 0$ ,  $\forall \alpha : 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
2. Como la hipotenusa es siempre mayor que cada uno de sus catetos, resulta

$$0 < \operatorname{sen} \alpha < 1$$

$$0 < \operatorname{cos} \alpha < 1$$

$$\operatorname{sec} \alpha > 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{cosec} \alpha > 1$$

3. Sabemos que el complemento de un ángulo es aquel ángulo que completa a  $90^\circ$  o a  $\pi/2$  así el complemento de  $\alpha$  es  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
4. Se acostumbra a decir que la función coseno es la cofunción del seno y viceversa, que la función cotangente es la cofunción de la tangente y viceversa y que la cosecante es la cofunción de la secante y viceversa. La relación entre una función y su cofunción está dada por:

$$\text{función}(\alpha) = \text{cofunción}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

De la siguiente figura (Figura 6) se tiene

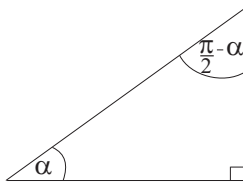


Figura 6

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{sec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

## 2.4. Razones de ángulos especiales

Vamos a llamar ángulos especiales a  $30^\circ, 45^\circ$  y  $60^\circ$ .

Para ver las razones trigonométricas de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  tomemos un triángulo equilátero de lado ( $l = 2$ )

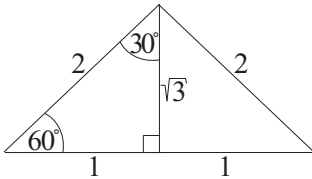


Figura 6

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = \operatorname{cos} 60^\circ \qquad \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{cotg} 60^\circ \qquad \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\operatorname{sec} 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ \qquad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{1} = \operatorname{sec} 60^\circ$$

Para  $45^\circ$ , considere el triángulo notable:

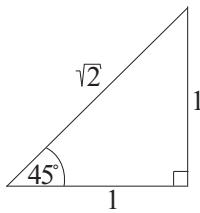


Figura 6

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{cos} 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \operatorname{cotg} 45^\circ$$

$$\operatorname{sec} 45^\circ = \sqrt{2} = \operatorname{cosec} 45^\circ$$

### Casos límites

Llamamos casos límites a los ángulos:  $0^\circ$  y  $90^\circ$

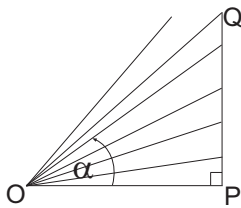


Figura 7

Con la Figura 7 y recordando las definiciones de las razones trigonométricas, en forma intuitiva, podemos asumir que para  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{PQ}{OQ}$ ; para  $\alpha$  tan pequeño como se quiera  $OQ \neq 0 \wedge PQ$  se achica tanto como se quiera, es decir  $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$ . Con el mismo razonamiento obtenemos  $\operatorname{cos} 0^\circ = 1$ ,  $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$  y  $\operatorname{sec} 0^\circ = 1$ .

Notemos que para el caso de la tangente  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{OP}$  y  $\alpha$  aproximándose a  $90^\circ$  tanto como se quiera  $PQ$ , crece indefinidamente mientras que  $OP$  se mantiene constante, es por esto que se acostumbra a expresar que:  $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$  o bien que  $\operatorname{tg} 90^\circ$  no esta definida. Aceptemos ahora sin previa definición rigurosa  $+\infty$  simplemente como un símbolo, es decir una abreviatura de lenguaje.

Sin más, aceptemos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 90^\circ &= \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 & \operatorname{sec} 90^\circ &= \operatorname{sec} \frac{\pi}{2} = +\infty \\ \operatorname{cos} 90^\circ &= \operatorname{cos} \frac{\pi}{2} = 0 & \operatorname{cotg} 90^\circ &= \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0 \\ \operatorname{tg} 90^\circ &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty & \operatorname{cosec} 90^\circ &= \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

## 2.5. Identidades fundamentales

Recordemos que una identidad matemática es una igualdad que siempre es válida, para todos los valores que puedan tomar las “variables” involucradas.

**Ejemplo.**

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y); \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Teorema 1.**  $\forall \alpha : 0 < \alpha < 90^\circ$ , se verifican:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad (1) \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha \quad (2)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (3) \qquad \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1 \quad (4)$$

$$\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1 \quad (5) \qquad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (7) \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (8)$$

**Nota:**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha &= (\operatorname{sen} \alpha)^2, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha \neq \operatorname{sen} \alpha^2 = \operatorname{sen} (\alpha^2) \\ \operatorname{cos}^2 \alpha &= (\operatorname{cos} \alpha)^2 \dots \text{ etc.} \end{aligned}$$

*Demostración.*

Dado el ángulo  $\alpha$ , en el triángulo rectángulo de la Figura 8.

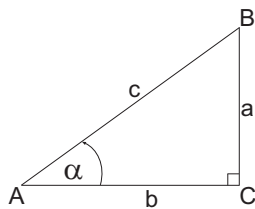


Figura 8

Del teorema de Pitágoras se tiene que

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{como } c > 0$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1 \quad \text{lo que es igual a}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

Análogamente ud. puede demostrar: (2) y (3).

Para (4)

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \text{ pero } \frac{c}{a} = \operatorname{cosec} \alpha$$

así  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1.$

Análogamente ud. puede demostrar: (5) y (6).

Finalmente para (7)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}; \quad c > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Análogamente ud. puede demostrar (8).

## 2.6. Expresión de cada razón en términos de las demás

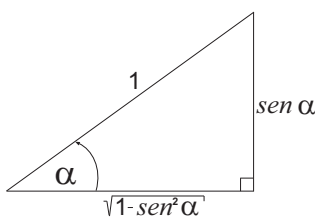
Las 8 relaciones (fórmulas) fundamentales no son independientes, es decir, hay algunas que pueden deducirse de las demás.

Por ejemplo:  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}} = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$

Vamos a dar un método geométrico para establecer cada una de las razones trigonométricas en términos de las demás.

El método consiste en tomar como unidad el lado del triángulo rectángulo que aparece como denominador en la razón en términos de la cual se quiere expresar una razón determinada. Por ejemplo:

Fórmulas en término de la razón  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1}$ . Sea el triángulo con hipotenusa = 1, así:



$$\operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

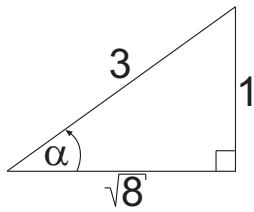
El resto de las fórmulas, quedan de tarea para ud.

## 2.7. Ejercicios resueltos

1. Si  $3tg\alpha = sec\alpha$  con  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Hallar los valores de:  $cotg\alpha$ ,  $cos\alpha$ ,  $cotg(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  y el valor de la expresión  $(tg\alpha + sec\alpha)^2 - 2$

**Solución.**

$$\forall \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], 3tg\alpha = sec\alpha \Leftrightarrow 3 \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{1}{cos\alpha} \Leftrightarrow sen\alpha = \frac{1}{3}. \text{ Note que } cos\alpha \neq 0 \text{ si } sen\alpha = \frac{1}{3}$$



De la figura:

$$cotg\alpha = \sqrt{8}, \quad cos\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

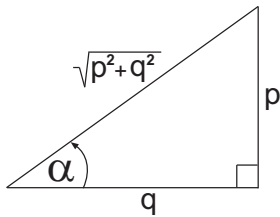
$$cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$(tg\alpha + sec\alpha)^2 - 2 = \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2 - 2 = \left(\frac{4}{\sqrt{8}}\right)^2 - 2 = 0$$

2. Si  $p\cos\alpha = q\sin\alpha$ ,  $p \wedge q > 0$ ,  $0 < \alpha < 90^\circ$ , calcule el valor de:  $p^2\sin^2\alpha - q^2\cos^2\alpha$

**Solución.**

$$p\cos\alpha = q\sin\alpha \Leftrightarrow \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{p}{q} \text{ pues } p \text{ y } q \text{ son positivos y } 0 < \alpha < 90^\circ, \text{ luego de aqu\u00ed que } tg\alpha = \frac{p}{q},$$



$$sen\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad cos\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \text{ entonces}$$

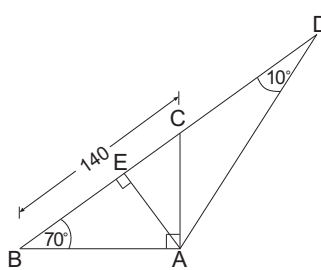
$$p^2\sin^2\alpha - q^2\cos^2\alpha = p^2 \frac{p^2}{p^2 + q^2} - q^2 \frac{q^2}{p^2 + q^2}$$

$$= \frac{p^4 - q^4}{p^2 + q^2} = \frac{(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)}{p^2 + q^2} = p^2 - q^2$$

3. En un triángulo  $ABC$ , si la hipotenusa mide  $BC = 140m$  y  $\beta = 70^\circ$ . Se prolonga  $BC$  hasta  $D$  y el ángulo  $ADB = 10^\circ$ . Encuentre  $CD$  y la perpendicular desde  $A$  al lado  $BC$ .

**Solución.**

Se pide  $EA$  y  $CD$



De la figura se tiene

$$BA = 140 \cos 70^\circ = 47,88m$$

$$BE = BA \cos 70^\circ \Rightarrow BE = 47,88 \cos 70^\circ = 16,38m$$

$$EC = 140 - 16,38 = 123,62m$$

$$EA = BA \operatorname{sen} 70^\circ = 47,88 \operatorname{sen} 70^\circ = 44,99m.$$

por otra parte  $\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{EA}{EC + CD}$

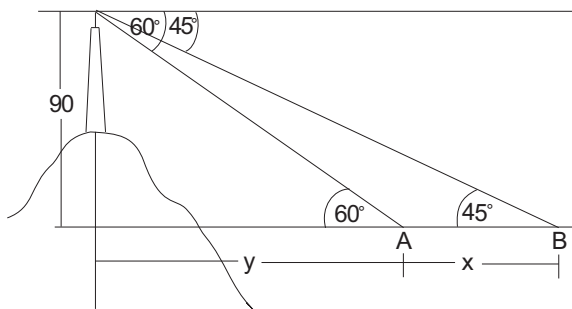
$$CD = \frac{EA}{\operatorname{tg} 10^\circ} - EC \Rightarrow CD = \frac{44,99}{\operatorname{tg} 10^\circ} - 123,62$$

$$CD = 131,53m.$$

4. Desde la cúspide de un faro, de  $90m$  de altura, se observan dos botes situados al oeste del faro según ángulos de depresión de  $60^\circ$  y  $45^\circ$ . Calcular la distancia que separa a los botes.

**Solución.**

Sean  $A$  y  $B$  las posiciones de los botes, queremos determinar  $x$ .



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{90}{y} \Rightarrow y = \frac{90}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{90}{x + y} \Rightarrow x + y = 90 \Rightarrow$$

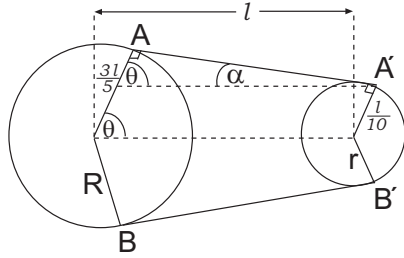
$$x = 90 - \frac{90}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 90(1 - \operatorname{cotg} 60^\circ) = 38,03m$$

5. Dos poleas están separadas a una distancia  $l$ , desde sus ejes. ¿Cuál es la longitud de una correa inextensible teórica que debe transmitir el movimiento de una a la otra en el mismo sentido, si los radios de las poleas son  $\frac{1}{10}l$  y  $\frac{3}{5}l$ ?

**Solución.**



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)l}{l} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$



La longitud  $L$  de la correa esta dada por

$$L = AA' + BB' + \widehat{AB} + \widehat{B'A'}$$

Por simetría,  $AA' = BB' = l \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$$\widehat{B'A'} = 2\theta \frac{1}{10} l = 2 \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{10} l = \frac{\pi}{15}$$

$$\widehat{AB} = 2\pi \frac{3}{5} l - \widehat{BA} = 2\pi \frac{3}{5} l - 2 \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{5} l = \frac{4}{5} \pi l$$

$$\text{luego } L = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l + \frac{\pi}{15} l + \frac{4}{5} \pi l = \left(\sqrt{3} + \frac{13}{15} \pi\right) l$$

6. Si  $a \cos^2 \alpha + b \operatorname{sen}^2 \alpha = c$  demostrar que

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{c - a}{b - c}$$

*Demostración.*

Como  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$$a \cos^2 \alpha + b \operatorname{sen}^2 \alpha = c(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$(b - c) \operatorname{sen}^2 \alpha = (c - a) \cos^2 \alpha$$

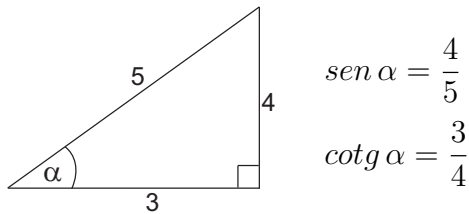
$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{c - a}{b - c}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{c - a}{b - c}$$

7. El seno de un ángulo es a su tangente como 3 : 5. Hallar el seno y la cotangente del ángulo

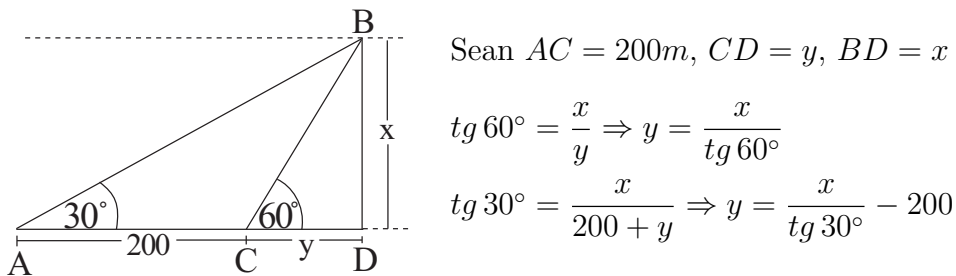
**Solución.**

Sea  $\alpha$  el ángulo en cuestión, así  $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{tg } \alpha} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$



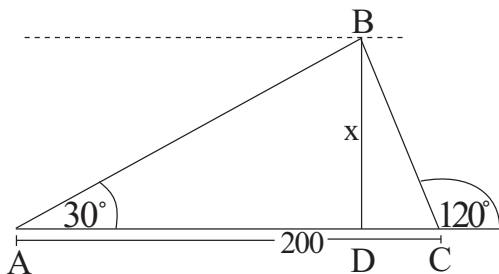
8. Un hombre está de pie en un punto  $A$  de la ribera de un río de orillas paralelas y observa que la recta que une  $A$  con un punto  $B$  de la ribera opuesta forma un ángulo de  $30^\circ$  con la orilla en la que él se encuentra. El hombre camina por la orilla hacia un punto  $D$ , que se encuentra al frente de  $B$ . Cuando ha caminado 200m el ángulo que vio anteriormente ha aumentado a  $60^\circ$ . Determine el ancho del río.

**Solución.**



De estas dos ecuaciones se obtiene que  $\frac{x}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{x}{\text{tg } 30^\circ} - 200$   
 $x = 100\sqrt{3}m$ .

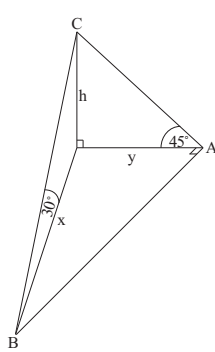
Calcule ud. el nuevo ancho si el ángulo aumenta hasta  $120^\circ$



Resp:  $x = 86,6m$

9. La elevación de un faro desde un lugar  $A$  al sur de él es  $45^\circ$  y desde un lugar  $B$  al oeste de  $A$  es de  $30^\circ$ . Si  $AB = 50m$ . Hallar la altura de dicho faro.

**Solución.**



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow y = h$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \sqrt{3}h \quad \text{pero como } 50^2 + y^2 = x^2$$

$$50^2 + h^2 = 3h^2 \Rightarrow h = \frac{50}{\sqrt{2}}$$

de donde  $h = 35,35m$

10. Demostrar las siguientes identidades

a)  $\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha - 1} = 2\sec^2 \alpha$

b)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha}{1 - 2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$

c)  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cosec} \alpha$

d)  $\frac{\sec \alpha + 1}{\sec \alpha - 1} - \frac{\sec \alpha - 1}{\sec \alpha + 1} - 4\operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{4}{1 + \sec \alpha}$

e)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \left( \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha} \right)^2$

f)  $\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha (\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$

g)  $2\sec^2 \alpha - \sec^4 \alpha - 2\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^4 \alpha = \operatorname{cotg}^4 \alpha - \operatorname{tg}^4 \alpha$

h)  $\frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^4 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha (2 + \operatorname{cotg}^2 \alpha)$

i)  $\frac{\operatorname{sen}^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$

j)  $\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cotg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha - 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

Nota: Es recomendable transformar uno de los miembros de la tesis hasta llegar al otro miembro, o bien ambos, hasta llegar a una misma expresión. No es recomendable pasar expresiones de un miembro a otro pues es posible cometer error, cuando las implicaciones son de un sólo sentido y no de equivalencia. En caso que ud. esté seguro, puede proceder como estime conveniente.

### Demostraciones

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha - 1} &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha - 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{\operatorname{sen} \alpha}} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha - 1} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha + 1} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha - 1} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha - 1 - (\operatorname{sen} \alpha + 1)}{\operatorname{sen}^2 \alpha - 1} \\
 &= \frac{-2}{-(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)} \\
 &= \frac{2}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \\
 &= 2 \operatorname{sec}^2 \alpha
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha}{1 - 2\operatorname{cos}^2 \alpha} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} - \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha} \\
 &= \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \alpha}}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} + \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \frac{1 + \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \\
 &= \operatorname{cosec} \alpha
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \frac{\sec \alpha + 1}{\sec \alpha - 1} - \frac{\sec \alpha - 1}{\sec \alpha + 1} - 4 \operatorname{cotg}^2 \alpha &= \frac{(\sec \alpha + 1)^2 - (\sec \alpha - 1)^2}{(\sec \alpha - 1)(\sec \alpha + 1)} - 4 \operatorname{cotg}^2 \alpha \\
 &= \frac{\sec^2 \alpha + 2 \sec \alpha + 1 - \sec^2 \alpha + 2 \sec \alpha - 1}{\sec^2 \alpha - 1} - 4 \operatorname{cotg}^2 \alpha \\
 &= \frac{4 \sec \alpha}{\sec^2 \alpha - 1} - \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \\
 &= \frac{4 \sec \alpha - 4}{\sec^2 \alpha - 1} \\
 &= \frac{4(\sec \alpha - 1)}{(\sec \alpha - 1)(\sec \alpha + 1)} \\
 &= \frac{4}{\sec \alpha + 1}
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha} \right)^2 &= \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 2 \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha} \\
 &= \frac{\sec^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 2 \operatorname{cotg} \alpha} \\
 &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{2 \operatorname{cosen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} \\
 &= \frac{(1 - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cosen} \alpha) \cos^2 \alpha}{(1 - 2 \operatorname{cosen} \alpha \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen}^2 \alpha} \\
 &= \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{1}} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sec^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} \\
 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
 &\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha (\operatorname{sec} \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{cos}^3 \alpha} = \\
 &\frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha)(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)}{\operatorname{cos} \alpha \left( \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)(\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha)} = \\
 &\frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha)}{\frac{(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} (1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)} = \operatorname{sen} \alpha.
 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
 &2 \sec^2 \alpha - \sec^4 \alpha - 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^4 \alpha = \\
 &\sec^2 \alpha (2 - \sec^2 \alpha) - \operatorname{cosec}^2 \alpha (2 - \operatorname{cosec}^2 \alpha) = \\
 &\sec^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) - \operatorname{cosec}^2 \alpha (1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha) = \\
 &(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) - (1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha)(1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha) = \\
 &1 - \operatorname{tg}^4 \alpha - (1 - \operatorname{cotg}^4 \alpha) = \\
 &\operatorname{cotg}^4 \alpha - \operatorname{tg}^4 \alpha
 \end{aligned}$$

h)

$$\frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1$$

por otra parte:

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{cosec}^4 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha (2 + \operatorname{cotg}^2 \alpha) = \operatorname{cosec}^4 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha (1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha) \\
 &= \operatorname{cosec}^4 \alpha - (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha + 1) \\
 &= \operatorname{cosec}^4 \alpha - \operatorname{cosec}^4 \alpha + 1 = 1
 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
 &\frac{\operatorname{sen}^6 \alpha - \operatorname{cos}^6 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha} + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha = \\
 &= \frac{(\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha)(\operatorname{sen}^4 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^4 \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha} + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha \\
 &= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha)^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha = 1
 \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
 \frac{tg^3 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} + \frac{cotg^3 \alpha}{1 + cotg^2 \alpha} &= \frac{tg^3 \alpha}{sec^2 \alpha} + \frac{cotg^3 \alpha}{cosec^2 \alpha} \\
 &= \frac{sen^3 \alpha}{cos^3 \alpha} \cdot cos^2 \alpha + \frac{cos^3 \alpha}{sen^3 \alpha} \cdot sen^2 \alpha \\
 &= \frac{sen^3 \alpha}{cos \alpha} + \frac{cos^3 \alpha}{sen \alpha} \\
 &= \frac{sen^4 \alpha + cos^4 \alpha}{sen \alpha cos \alpha} \\
 &= \frac{(sen^2 \alpha + cos^2 \alpha)^2 - 2sen^2 \alpha cos^2 \alpha}{sen \alpha cos \alpha} \\
 &= \frac{1}{sen \alpha cos \alpha} - 2sen \alpha cos \alpha \\
 &= cosec \alpha \cdot sec \alpha - 2sen \alpha cos \alpha
 \end{aligned}$$

11. Si  $2(cotg^2 \beta - cotg^2 \alpha) = cotg^2 \beta cosec^2 \alpha$  demuestre que  $sen^2 \alpha = cos^2 \alpha + sen^2 \beta$

*Demostración.*

$$2 \left( \frac{cos^2 \beta}{sen^2 \beta} - \frac{cos^2 \alpha}{sen^2 \alpha} \right) = \frac{cos^2 \beta}{sen^2 \beta} \cdot \frac{1}{sen^2 \alpha}$$

$$2 cos^2 \beta sen^2 \alpha - 2 cos^2 \alpha sen^2 \beta = cos^2 \beta$$

$$2 cos^2 \beta (1 - cos^2 \alpha) - 2 cos^2 \alpha sen^2 \beta = cos^2 \beta$$

$$2 cos^2 \beta - cos^2 \beta cos^2 \alpha - 2 cos^2 \alpha sen^2 \beta = cos^2 \beta$$

$$2(1 - sen^2 \beta) - 2 cos^2 \alpha (cos^2 \beta + sen^2 \beta) = 1 - sen^2 \beta$$

$$2 - 2sen^2 \beta - cos^2 \alpha = 1 - sen^2 \beta$$

$$1 - 2cos^2 \alpha = sen^2 \beta$$

$$sen^2 \alpha - cos^2 \alpha = sen^2 \beta \Leftrightarrow sen^2 \alpha = cos^2 \alpha + sen^2 \beta$$

12. Si  $cotg \alpha = \frac{1 - a cos \beta}{a sen \beta}$  y  $cotg \beta = \frac{1 - b cos \alpha}{b sen \alpha}$  demuestre que  $a sen \beta = b sen \alpha$

*Demostración.*

$$\cotg \alpha = \frac{1}{a \operatorname{sen} \beta} - \cotg \beta$$

$$\cotg \beta = \frac{1}{b \operatorname{sen} \alpha} - \cotg \alpha$$

De aquí  $\cotg \alpha + \cotg \beta = \frac{1}{a \operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{b \operatorname{sen} \alpha}$  de donde:  $b \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \beta$

13. Demuestre que  $A$  es independiente de  $\alpha$ , es decir es una constante

$$A = \frac{\sec^4 \alpha + 2tg^4 \alpha - 2tg^2 \alpha - 1}{5tg^4 \alpha}$$

*Demostración.*

$$A = \frac{2tg^4 \alpha + \sec^4 \alpha - 2(\sec^2 \alpha - 1) - 1}{5tg^4 \alpha}$$

$$A = \frac{2tg^4 \alpha + \sec^4 \alpha - 2\sec^2 \alpha + 1}{5tg^4 \alpha} = \frac{2tg^4 \alpha + (\sec^2 \alpha - 1)^2}{5tg^4 \alpha}$$

$$A = \frac{2tg^4 \alpha + tg^4 \alpha}{5tg^4 \alpha} = \frac{3tg^4 \alpha}{5tg^4 \alpha} = \frac{3}{5}$$

14. Elimínese  $\theta$  entre las ecuaciones

$$\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = a$$

$$\cos \theta + \operatorname{sen} \theta = b$$

**Solución.**

$$(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) = a$$

$$\text{de aquí } \cos \theta - \operatorname{sen} \theta = \frac{a}{b} \quad (1)$$

$$\text{y como: } \cos \theta + \operatorname{sen} \theta = b \quad (2)$$

elevando al cuadrado (1) y (2) y luego sumando miembro a miembro se obtiene:

$$2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \frac{a^2}{b^2} + b^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} + b^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2 + b^4$$



15. Resolver las siguientes ecuaciones considerando  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

a)  $tgx - cotgx = cosecx$

b)  $sen^4x + cos^4x = \frac{1}{2}$

c)  $(1 + cotgx)(senx - cosx)^2 = 1 - cotgx$

d)  $2cos^3x + sen^2x - 1 = 0$

**Solución.**

Note que solo consideraremos:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{senx}{cosx} - \frac{cosx}{senx} = \frac{1}{senx}; \quad x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}$$

a)  $sen^2x - cos^2x = cosx$

$2cos^2x + cosx - 1 = 0$ , ecuación de 2º grado para  $cosx$

así  $cosx = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -1 \end{array} \right.$

$cosx = 1$  es imposible pues  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

$$sen^4x + cos^4x = \frac{1}{2}$$

$$(sen^2x + cos^2x)^2 - 2sen^2x cos^2x = \frac{1}{2}$$

b)  $2sen^2x cos^2x = \frac{1}{2}$

$$sen^2x(1 - sen^2x) = \frac{1}{4}$$

$$4sen^4x - 4sen^2x + 1 = 0$$

$$(2sen^2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow sen^2x = \frac{1}{2} \Rightarrow senx = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sólo se considera  $senx = \frac{1}{\sqrt{2}}$  pues:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  así  $x = \frac{\pi}{4}$

$$c) (1 + \cot x)(\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \operatorname{cos}^2 x) = 1 - \cot x$$

$$(1 + \cot x)(1 - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x) = 1 - \cot x$$

$$1 - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \cot x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 1 - \cot x \operatorname{cos} x \left( -\operatorname{sen} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{cos} x \right) = 0$$

$$\operatorname{cos} x = 0 \text{ o } -\operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{cos} x (\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$d) 2 \operatorname{cos}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$$

$$2 \operatorname{cos}^3 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

$$2 \operatorname{cos}^3 x - \operatorname{cos}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 x (2 \operatorname{cos} x - 1) = 0$$

$$\operatorname{cos}^2 x = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{cos} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{cos} x = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \quad \quad x = \frac{\pi}{3}$$

16. Demostrar  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x - 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x + 1} = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{cos} x}$  y use esta identidad para resolver la ecuación  $\operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x - 1 = 1(\operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{cos} x)$

*Demostración.*

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x - 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x + 1} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x + 1}{\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x - 1} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} x + 1 \left( 1 - \frac{\operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{sen} x} \right)}{\operatorname{cos} x \left( 1 + \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{cos} x} \right)}$$

pero:

$$1 - \frac{\operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 1 - \frac{\operatorname{cos}^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x) \operatorname{cos} x} = 1 - \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

$$= 1 + \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{cos} x}$$

Solución de la ecuación

$$\frac{2(\operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{cos} x)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x + 1} = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{cos} x}$$

$$\frac{2(\operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{cos} x) \cdot \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{cos} x} = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{cos} x}$$

$$2 \operatorname{cos}^2 x = \operatorname{sen} x + 1$$

$$(1 + \operatorname{sen} x)(2(1 - \operatorname{sen} x) - 1) = 0$$

$$(1 + \operatorname{sen} x)(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x = 0 \\ 1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = -1 \text{ no da solución pues } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

17. Resolver, considerando  $x$  un ángulo agudo

$$\text{i) } \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \frac{4 - \sqrt{3}}{\operatorname{sec} x} = 2(1 - \sqrt{3})$$

$$\text{ii) } \operatorname{cot} g x - \sqrt{3} \operatorname{cot} g x + 1 = \sqrt{3}$$

**Solución.**

i)

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{sec}^2 x} - \frac{4 - \sqrt{3}}{\operatorname{sec} x} 2(1 - \sqrt{3})$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - (4 - \sqrt{3}) \operatorname{cos} x - 2(1 - \sqrt{3}) = 0$$

$$2 \operatorname{cos}^2 x + (4 - \sqrt{3}) \operatorname{cos} x - 2\sqrt{3} = 0$$

de donde resolviendo esta ecuación de 2º grado para  $\operatorname{cos} x$ , resulten:  $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  en cuyo caso  $x = 30^\circ$  y  $\operatorname{cos} x = -2$  que no da solución pues  $0 < \operatorname{cos} x < 1$  para  $x$  agudo.

ii)

$$\cot gx - \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3}$$

$$\cot gx - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cot gx} + 1 = \sqrt{3}$$

$$\cot g^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cot gx - \sqrt{3} = 0$$

de donde resultan:  $\cot gx = -1$  que no da solución para  $x$  un ángulo agudo y  $\cot gx = \sqrt{3} \Rightarrow x = 30^\circ$ .

## 2.8. Ejercicios propuestos

- Si  $2 \cos \alpha = \cot g \alpha$ ,  $0 < \alpha < 90^\circ$ . Hallar los valores de:  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\sec \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  y  $\alpha$  como también calcule la expresión

$$(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (1 + \cos \alpha)$$

*Respuesta.*

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 2,  $30^\circ$  la expresión es igual a 0.

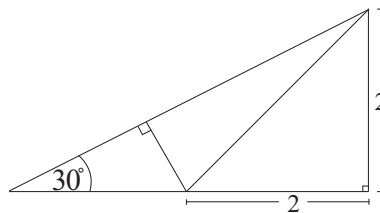
(Ver ejercicio resuelto 1)

- Si  $3 \operatorname{tg} \alpha = \sec \alpha + 1$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , calcule el valor de  $\operatorname{tg} \alpha$ .

*Respuesta.*

$\frac{3}{4}$  (Eleve al cuadrado y proceda con cuidado)

- Muestre como se resuelve un triángulo rectángulo del cual se dan un ángulo agudo y su lado opuesto.
- Usando la figura

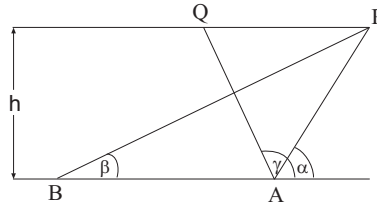


calcular  $\cos 15^\circ$

*Respuesta.*

0,966 (Ver ejercicio resuelto 3)

5. Dos observadores  $A$  y  $B$  miden ángulos de elevación de un avión que los sobrevuela a una altura constante. En cierto instante los ángulos medidos para  $A$  y  $B$  son  $\alpha = 60^\circ$  y  $\beta = 40^\circ$ , respectivamente. Diez segundos más tarde,  $A$  mide un ángulo de elevación  $\gamma = 110^\circ$ . La separación entre  $A$  y  $B$  es de  $1\text{Km}$ . ¿A qué altura vuela el avión? ¿Cuál es su velocidad?



*Respuesta.*

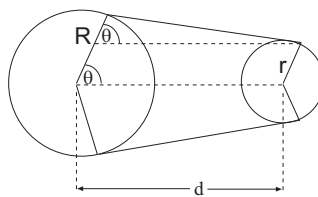
$1,62759\text{Km}$ ;  $153,20\text{m/seg}$ .

6. Determine el largo mínimo que debe tener una correa para unir dos poleas de radios  $R$  y  $r$ , separadas entre sí una distancia  $d$ . ( $r < R$ )

*Respuesta.*

$$l = 2R(\pi - \theta) + 2\sqrt{d^2 - (R - r)^2} + 2r\theta$$

donde  $\cos \theta = \frac{R-r}{d}$



¿Cuál debe ser el largo si la correa se cruza entre las poleas?

(Ver ejercicio resuelto 5)

7. El ángulo de elevación de lo alto de una torre es de  $57,5^\circ$  y el asta de bandera de  $7\text{m}$  de altura en la punta de la torre, subtendiendo un ángulo de  $2^\circ 30'$  a la vista del observador. Hallar la altura de la torre.

*Respuesta.*

67,67m

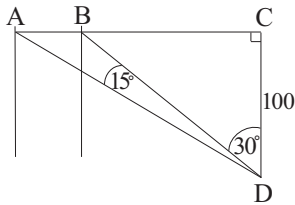
8. El seno de un ángulo es a su coseno como 8 : 15. Hallar el seno y el coseno de dicho ángulo.

*Respuesta.*

$\frac{8}{17}$  y  $\frac{15}{17}$  (ver ejercicio resuelto 7)

9. Para determinar el ancho  $AB$  de un río de orillas paralelas, un observador se ubica en  $C$  sobre la recta  $AB$  prolongada más allá de  $B$  y luego camina 100m perpendicularmente a dicha recta, así halla que  $AB$  y  $BC$  subtienen a su vista ángulos de  $15^\circ$  y  $30^\circ$ . Encontrar el ancho del río.

*Respuesta.*



42,26m (ver ejercicio resuelto 8)

10. La elevación de una torre de altura  $h$ , desde un punto  $A$  al sur de ella es de  $60^\circ$  y desde un punto  $B$  al oeste de ella es de  $30^\circ$ . Si  $AB = 100m$  encuentre la altura de la torre.

*Respuesta.*

$h = 54,7m$  (ver ejercicio resuelto 9)

11. Una torre de altura  $h$ , esta en el borde de un acantilado. Desde un punto del plano horizontal que pasa por la base del acantilado, las elevaciones angulares de las partes superior e inferior de la torre son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Demuestre que la altura del acantilado es

$$\frac{h \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

12. Un asta de bandera de  $b m$ . de altura colocada en la punta de una torre de  $l m$ . de altura, subtende el mismo ángulo  $\beta$  desde dos puntos separados  $a m$ . y que están en una recta horizontal que pasa por la base de la torre. Si  $\theta$  es el ángulo que subtende el trazo  $a$  desde la punta del asta. Probar que

$$b = a \operatorname{sen} \beta \operatorname{cosec} \theta$$

$$2l = a \operatorname{cosec} \theta (\cos \theta - \operatorname{sen} \beta)$$

13. Demostrar las siguientes identidades

- a)  $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{cos} \alpha)^2 = (\operatorname{sec} \alpha - 1)^2$
- b)  $\operatorname{sen}^4 \alpha (3 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + \operatorname{cos}^4 \alpha (3 - 2 \operatorname{cos}^2 \alpha) = 1$
- c)  $\frac{\operatorname{tg} \theta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} + \frac{\operatorname{cotg} \theta}{(1 + \operatorname{cotg}^2 \theta)^2} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$
- d)  $\operatorname{cosec}^6 \alpha - \operatorname{cotg}^6 \alpha = 1 + 3 \operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{cotg}^2 \alpha$
- e)  $\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \operatorname{cos} \theta} + \operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = 2 \operatorname{cosec} \alpha$
- f)  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)^2 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha)^2 = \frac{2(\operatorname{sen}^4 \alpha + \operatorname{cos}^4 \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha}$
- g)  $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha + 1} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sec} \alpha + 1} = 0$
- h)  $\frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \operatorname{sec} \theta} - \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sec} \theta} = 2 \operatorname{cotg} \theta (\operatorname{cos} \theta + \operatorname{cosec} \theta)$
- i)  $\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{sec} \theta + 1} = \operatorname{cosec} \theta$
- j)  $\operatorname{cos} \theta (\operatorname{tg} \theta + 2)(2 \operatorname{tg} \theta + 1) = 2 \operatorname{sec} \theta + 5 \operatorname{sen} \theta$

14. Si  $\operatorname{tg}(n \alpha) = n \operatorname{tg} \alpha$ ,  $n \in \mathbb{N}$  demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}^2(n \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{n^2}{1 + (n^2 - 1) \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

15. Elimínese  $\theta$  entre las ecuaciones

$$x \operatorname{sen} \theta - y \operatorname{cos} \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{b^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

*Respuesta.*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

16. Demostrar

- i)  $\operatorname{sec}^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{cotg}^2 \beta - \operatorname{sec}^2 \alpha \operatorname{cotg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \beta = 1$
- ii)  $\operatorname{sec}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{sec}^2 \beta = \operatorname{sec}^2 \beta - \operatorname{sec}^2 \alpha$

17. Elimínese  $\theta$  entre las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \begin{array}{l} \text{sen}x + \text{cos}x = m \\ \text{sen}^3x + \text{cos}^3x = n \end{array} \\ \text{ii)} & \begin{array}{l} 4m \text{tg}\theta = 1 + \text{sen}\theta \\ 4n \text{tg}\theta = 1 - \text{sen}\theta \end{array} \end{array}$$

*Respuesta.*

$$\text{i)} m^3 = 3m - 2n \quad \text{ii)} (m^2 - n^2)^2 = mn$$

18. Resolver las siguientes ecuaciones, considerando  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{l} \text{i)} \text{tg}x + \text{cot}x = 2 \text{sec}x \\ \text{ii)} \text{sen}^3x = \text{sen}x + \text{cos}^3x \\ \text{iii)} (1 - \text{tg}x)(\text{sen}x + \text{cos}x)^2 = 1 + \text{tg}x \\ \text{iv)} 2\text{sec}^3x + \text{tg}^2x = 2 \end{array}$$

*Respuesta.*

$$\text{i)} \frac{\pi}{6} \quad \text{ii)} \frac{\pi}{2} \quad \text{iii)} 0 \quad \text{iv)} 0$$

(Ver ejercicios resueltos 18)

19. Si  $\text{cotg}\alpha + \text{cosec}\alpha = 2$ , demuestre que  $\text{cos}\alpha = \frac{3}{5}$  si  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

20. Resolver la ecuación,

$$(\sqrt{3} - 1)(2\text{tg}^2x - \text{sec}^2x) = \text{sec}x(1 - \text{tg}x)$$

$$\text{para: } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

*Respuesta.*

$$\frac{\pi}{4}$$