ALGEBRA LINEAL

Problema 1.

Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - ax_2 - x_3 \quad + x_4 &= b \\ x_1 + bx_2 + 2x_3 \ - x_4 &= c \\ -x_1 + cx_2 - 2x_3 + 2x_4 &= a \\ x_1 + \ x_2 - \ x_3 \ - x_4 &= a+b+c \end{aligned}$$

i) Determine los valores de a, b y c para que el sistema dado admita como solución a:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$ para un valor del parámetro t fijo.

ii) Determine condiciones entre a, b y c para que el sistema dado tenga solución exáctamente con un parámetro, luego encuentre una solución particular y la solución del sistema homogeneo asociado en este caso.

Solución.

i) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1-t \\ 2 \\ t \\ 1+2t \end{bmatrix}$, qué X sea solución del sistema dado es que lo satisfaga es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & -1 & 1 \\ 1 & b & 2 & -1 \\ -1 & c & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ 2 \\ t \\ 1+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \\ a+b+c \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 2a + b \qquad\qquad &= 2 \\ 2b - c \quad - t &= 0 \\ a \qquad - 2c - 3t &= 1 \\ a + b + c \quad + 4t &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo resulta: $a = \dfrac{23}{22}, \quad b = -\dfrac{1}{11}, \quad c = -\dfrac{13}{22}$ y $t = \dfrac{9}{22}$

ii) Se debe anular una fila completa de la siguiente matriz, para obtener exáctamente un parámetro en la solución,

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & -a & -1 & 1 & b \\ 1 & b & 2 & -1 & c \\ -1 & c & -2 & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & -1 & a+b+c \end{array}\right] \sim \cdots$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{3}(2a+c) & 0 & 0 & \frac{1}{3}(2b-a) \\ 0 & b+c & 0 & 1 & a+c \\ 0 & \frac{1}{3}(a+3b+2c) & 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a-b+3c) \\ 0 & a+2b+2c+1 & 0 & 0 & 3(a+c) \end{array}\right],$$ luego se debe tener

$(a+2b+2c+1=0 \ \wedge \ 3(a+c)=0) \Rightarrow a = -c \ \wedge \ b = -\frac{1}{2}(c+1)$ así resulta la solución

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2b+c) \\ 0 \\ \frac{1}{6}(3c+1) \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}c \\ 1 \\ \frac{1}{6}(c+3) \\ -\frac{1}{2}(c-1) \end{bmatrix}, \ t \text{ parámetro.}$$

Problema 2.

Dado el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 \quad\quad + x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 + kx_4 - 4x_5 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad &= p \end{aligned}$$

a) Determine k y p de modo que $X_B = \{x_2, x_4, x_5\}$, y en este caso obtenga L y U.

b) Resuelva por LU para la base $X_B = \{x_2, x_3, x_5\}$

Solución.

a) $X_B = \{x_2, x_4, x_5\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, la exigencia de X_B supone B no

singular $\Leftrightarrow |\mathrm{B}| \neq 0 \Leftrightarrow 3 - k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 3$

Se debe hacer préviamente $PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -4 \end{bmatrix}$, con $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

con el fín de no imponer condiciones no necesarias para k, excepto $k \neq 3$, así

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix} \text{ y } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

b) Nótese que la matriz B asociada a la base $X_B = \{x_2, x_3, x_5\}$ es singular, por lo que es imposible resolver el sistema con esta exigencia.

Problema 3.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 14 \\ 3 & 4 & 7 & 19 \\ 4 & 5 & 9 & 24 \\ 5 & 6 & 11 & 29 \end{bmatrix}$

a) Determine una base para el subespacio $Im\, A$.

b) Determine una base para el subespacio $Ker\, A \cap W$, donde

$$W = \{(x, y, z, t) \ / \ 2x + y - 2t = 0\}$$

Solución.

a) El espacio $Im\, A$ está generado por los vectores columna de A, entonces

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 14 \\ 3 & 4 & 7 & 19 \\ 4 & 5 & 9 & 24 \\ 5 & 6 & 11 & 29 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & -12 \\ 0 & -4 & -4 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (*)$$

luego, una base para $Im\, A$ es $\{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 6)\}$

b) De $(*)$, $Ker\, A = \{\, (x, y, z, t) \ / \ x + z + 7t = 0$

$y + z + t = 0 \ \}$

por tanto

$$Ker\, A \cap W = \{\, (x, y, z, t) \ / \ x + z + 7t = 0$$

$$y + z + t = 0$$

$$2x + y - 2t = 0 \ \}$$

Así, $\forall\, \alpha \in Ker\, A \cap W \;\Leftrightarrow\; \alpha = (x, y, z, t)\ /\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$

de donde resolviendo se obtiene, $x = -\dfrac{4}{3}t,\ y = \dfrac{14}{3}t\,,\ z = -\dfrac{17}{3}t$

con lo que $Ker\, A \cap W = \left\langle \{(-4, 14, -17, 3)\} \right\rangle$ y una base del subespacio

$Ker\, A \cap W$, es $\{(-4, 14, -17, 3)\}$.

Problema 4.

En P_2 sobre $\mathbb{R}$, dadas las bases

$$S_1 = \{\, 1, 1+t, (1+t)^2 \,\} \text{ y } \ S_2 = \{\, 2-t, 3, 1+t^2 \,\}$$

a) Determine la matriz P de cambio de base, de: $S_2 \to S_1$.

b) Si $[p(t)]_{S_2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$, determine: $p(t)$ y $[p(t)]_{S_1}$

Solución.

a)
$$\begin{aligned} 2 - t &= 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (1+t) + 0 \cdot (1+t)^2 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 0 \cdot (1+t)^2 \\ 1 + t^2 &= 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (1+t) + 1 \cdot (1+t)^2 \end{aligned}$$

de donde $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) De inmediato $p(t) = 10 \cdot (2-t) + 20 \cdot 3 + 30 \cdot (1+t^2) = 110 - 10t + 30t^2$

por tanto se debe tener

$110 - 10t + 30t^2 = 150 \cdot\ 1 + (-70) \cdot (1+t) + 30 \cdot (1+t)^2 \;\Rightarrow$

$[p(t)]_{S_1} = \begin{bmatrix} 150 \\ -70 \\ 30 \end{bmatrix}$

Otra forma, es : $\quad [p(t)]_{S_1} = P\, [p(t)]_{S_2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -70 \\ 30 \end{bmatrix}$

Problema 5.

Una empresa elabora 4 tipos de productos P_1, P_2, P_3 y P_4

P_1, requiere 10 hrs. de diseño, 4 de armado, 5 de pulido y 2 hrs. de detalles.

P_2, requiere 2 hrs. de diseño, 3 de armado, 1 de pulido y 1 hrs. de detalles.

P_3, requiere 1 hrs. de diseño, 2 de armado, 0 de pulido y 1 hrs. de detalles.

P_4, requiere 5 hrs. de diseño, 3 de armado, 1 de pulido y 4 hrs. de detalles.

Los recursos que se disponen son: 610 hrs. de diseño, 334 hrs. de armado, 288 hrs. de pulido y 172 hrs. para detalles.

a) Determine el nivel de producción de modo, de ocupar todos los recursos.

b) Los costos por hora para el diseño es de \$10, los costos por hora para el armado es de \$20, los costos por hora en las máquinas de pulido es de \$12 y por terminar los detalles se cobra \$5 la hora. Calcular usando matrices el costo por unidad para elaborar los productos: P_1, P_2, P_3 y P_4.

c) Hay más demanda por el producto P_4 que por el producto P_1, esto obliga a cambiar el nivel de producción acostumbrado. Se impone la producción de 20 de P_1, 20 de P_2, 5 de P_3 y 25 de P_4. Determine usando matrices, si es necesario adquirir más recursos.

Solución.

a)

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 610 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 334 \\ 5x_1 + x_2 + x_4 &= 288 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 172 \end{aligned}$$

$$X = A^{-1}b \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Se deben producir : 50 unidades de P_1, 30 de P_2, 10 de P_3 y 8 de P_4.

b) $$A^t\,c = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 97 \\ 62 \\ 142 \end{bmatrix}$$

c) $$A\,X' = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 370 \\ 225 \\ 145 \\ 165 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Como $370 < 610,\ 225 < 334,\ 145 < 288$ y $165 < 172$, no es necesario adquirir más recursos.

Problema 6.

Gas-Chile, tomó los siguientes datos sobre la eficiencia de combustible (97 octanos) en Km / lt. para automóviles (de alto rendimiento) en un tramo de la carretera del Norte.

Año	Km / lt.
1996	15.5
1997	15.9
1998	16.7
1999	17.1
2000	17.8
2001	18.2
2002	18.3
2003	19.2
2004	20.0

a) Encuentre una recta que ajuste por mínimos cuadrados y grafíquela ($x = 0$ representa a 1996 , $\cdot\ \cdot\ \cdot$, $x = 8$ representa a 2004). Analice si la recta parece razonable para los datos.

b) Suponga que la tendencia se mantiene, ocupe tal tendencia para predecir el año en que el promedio será de 25.

Solución.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad A^t A = \begin{bmatrix} 9 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix},$$

$$(A^tA)^{-1} = \frac{1}{540}\begin{bmatrix} 204 & -36 \\ -36 & 9 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 15.5 \\ 15.9 \\ 16.7 \\ 17.1 \\ 17.8 \\ 18.2 \\ 18.3 \\ 19.2 \\ 20.0 \end{bmatrix}$$

$$X = (A^tA)^{-1}A^tY = \begin{bmatrix} 15.487 \\ 0.537 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0.537\,x + 15.487$$

La recta es razonable pués la pendiente es positiva lo que indica crecimiento.

b) $y = 25 \Rightarrow 25 = 0.537\,x + 15.487 \Leftrightarrow x = 17.71 \Rightarrow$ Entre los años 2013 y 2014.

Problema 7.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (kx + 3y, x - 2y + z, kx + y - z)$$

a) Determine k de modo que $dim\,KerT = 1$

b) Considere $k = 1$ y encuentre una base para la $Im\,T$, ¿es T invertible? en caso afirmativo determine una fórmula para T^{-1}.

c) Encuentre la matriz representativa de T con respecto a las bases $S_1 \rightarrow S_2$, donde $S_1 = \{(1,1,0),(1,-1,2),(0,1,2)\}$ y $S_2 = \{(0,1,1),(2,1,0),(-1,1,3)\}$. Considere también $k = 1$.

Solución.

a) $\forall\, \alpha \in KerT \Leftrightarrow \alpha = (x, y, z)\,/\ \left[\begin{array}{ccc|c} k & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4k+3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ luego}$$

$$dim\,KerT = 1 \Rightarrow\ 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

b) Como $k = 1 \neq -\frac{3}{4} \Rightarrow Im\,T = \mathbb{R}^3 \ \wedge\ KerT = \{\theta\} \Rightarrow \exists\, T^{-1}$, como

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T^{-1}(x,y,z)=\tfrac{1}{7}(x+3y+3z,2x-y-z,3x+2y-5z)$$

c) $T(1,1,0) \quad = (4,-1,2) = -8(0,1,1)+\frac{11}{3}(2,1,0)+\frac{10}{3}(-1,1,3)$

$T(1,-1,2) = (-2,5,-2) = 14(0,1,1)-\frac{11}{3}(2,1,0)-\frac{16}{3}(-1,1,3)$

$T(0,1,2) \quad = (3,0,-1) = -2(0,1,1)+\frac{5}{3}(2,1,0)+\frac{1}{3}(-1,1,3)$

luego

$$B=\begin{bmatrix}-8 & 14 & -2\\ \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3}\\ \frac{10}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Problema 8.

Dada

$$A=\begin{bmatrix}k & 2 & 1\\ 2 & -1 & p\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

a) Determine k y p de modo que $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ sea un vector propio para A.

b) Sea S la base de vectores propios de la matriz A, para los valores de k y p que determinó en a). Determine P matriz de cambio de base de S a S', siendo S' la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y verifique que $P^{-1}AP=D$, D matriz diagonal

Solución.

a)

$$\begin{bmatrix}k & 2 & 1\\ 2 & -1 & p\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} k+2+1 &= t\\ 2-1+p &= t \;\Leftrightarrow\; t=3 \Rightarrow k=0 \wedge p=2\\ 1+2 &= t \end{aligned}$$

b) Valores propios de A : $t_1=-3,\ t_2=-1 \ \wedge\ t_3=3$

Vectores propios:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

asociados a t_1,t_2 y t_3 respectivamente, luego

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema 9.

Encuentre la matriz de proyección $P_{W^\perp}$ sobre la recta $W^\perp$, donde

$$W = \{\, (x, y, z) \,/\; x - y - 2z = 0 \,\}$$

y verifique que $P_W P_{W^\perp} = 0$

Solución.

De inmediato $W^\perp = \langle \{(1,\, -1,\, -2)\} \rangle \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y,

$$P_{W^\perp} = A(A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_W = I_3 - P_{W^\perp} \Leftrightarrow$$

$P_W = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ y fácilmente se verifica que $P_W P_{W^\perp} = 0$

Problema 10.

Demuestre que si $\alpha^t\alpha = 1,\; \alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $a_i \in \mathbb{R}$, entonces $P = \alpha\,\alpha^t$ tiene

rango 1 y que P es la matriz de proyección al espacio $\langle \{\alpha\} \rangle$.

Demostración.

$\alpha^t\alpha = 1 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ considerando $a_i \neq 0\,, \forall\, i$

$$P=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(P)=1$, si se consideran algunos $a_i \neq 0$ la demostración es similar.

De inmediato $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ y $A(A^tA)^{-1}A^t=\frac{1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}AA^t=P.$

Problema 11.

Dada $T: M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ una función definida por $T(A)=A^t+A$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Averigue si T es biyectiva.

c) Encuentre una base para el $Ker\,T$, considere $T: M_{3\times 3} \to M_{3\times 3}$.

Solución.

a) $T(A+B)=(A+B)^t+(A+B)=(A^t+A)+(B^t+B)=T(A)+T(B)$

$T(kA)=(kA)^t+(kA)=kA^t+kA=k(A^t+A)$

b) $\forall\, A \in Ker\,T \Leftrightarrow T(A)=A^t+A=0_M \Leftrightarrow a_{ii}=0,\ \forall\, i=1,2,\ldots,n$ pero $a_{ik}+a_{ki}=0, \forall\, i\neq k,\ i,k=1,2,\ldots,n$ de aquí se sigue $a_{ik}=-a_{ki}$, a_{ki} parámetro no necesariamente nulo, lo que prueba que el $Ker\,T \neq \{\theta\}$, por tanto T no es biyectiva.

c) $\forall\, A \in Ker\,T \Leftrightarrow T(A)=A^t+A=0_M$, con $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0 \ \wedge\ a_{12}=-a_{21},\ a_{13}=-a_{31}$ y $a_{23}=-a_{32}$

luego $A=\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$

$$A=a_{21}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+a_{31}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+a_{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base para $Ker\,T$ es

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Problema 12.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, una $T.L.$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 21 \\ 4 & 16 & 40 \end{bmatrix}$$

con respecto a : $S_1 \to S_2$ donde: $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$S_2 = \{(1,1,1,1),(0,-1,0,1),(1,0,-1,0),(1,2,1,2)\}$

a) A partir de S_2 encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^4$.

b) Determine la matriz representativa de T, con respecto a bases canónicas de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ respectivamente.

c) Encuentre una base para el $Ker\,T$ y otra para la $Im\,T$.

Solución.

a) $\beta_1 = (1,1,1,1), \beta_2 = (0,-1,0,1), \beta_3 = (1,0,-1,0)$

$\beta_4 = (1,2,1,2) - \dfrac{3}{2}(1,1,1,1) = \dfrac{1}{2}(-1,1,-1,1)$

Base ortonormal para $\mathbb{R}^4 = \{\, \dfrac{1}{2}\beta_1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_3, \dfrac{1}{2}\beta_4 \,\}$

b) $B = PAQ^{-1}$, donde $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -18 & -36 & 62 \\ -22 & -44 & 73 \\ -6 & -12 & 20 \\ -26 & -52 & 89 \end{bmatrix}$$

c) Una base para $Im\,T = \{(9,11,3,13),(62,73,20,89)\}$

Una base para $Ker\,T = \{(-1,1,0)\}$

Problema 13.

Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & -4 \\ 5 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Determine una base para el subespacio W definido por:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;/\; A\,X = Y \text{ sea compatible } \;\forall\, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución.

$A\,X = Y \;\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 & : & a \\ 3 & 2 & 2 & -1 & : & b \\ 2 & 2 & 5 & -4 & : & c \\ 5 & 2 & -4 & 5 & : & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 & : & a \\ -1 & 0 & 3 & -3 & : & b-a \\ -2 & 0 & 6 & -6 & : & c-a \\ 1 & 0 & -3 & 3 & : & d-a \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 11 & -10 & : & 4b-3a \\ 1 & 0 & -3 & -10 & : & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & a-2b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -2a+b+d \end{bmatrix}$$

$$A\,X = Y \text{ es compatible } \;\Leftrightarrow\; \begin{aligned} a-2b+c &= 0 \\ -2a+b+d &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{luego } \forall\, X \in W \;\Leftrightarrow\; X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;/\; \begin{aligned} c &= -a+2b \\ d &= 2a-b \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ -a+2b & 2a-b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ es L.I. por tanto una base para W.

Problema 14.

Si $\{v_i\}_{i=1}^{i=m}$ es una base para un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, si $c \neq 0$ y
$u_j = c\, v_j - b_j\, v_m$ con $j = 1,\, 2,\, 3,\, \cdot\, \cdot\, \cdot\, \cdot\, (m-1)$.
Demuestre que $\{u_j\}_{j=1}^{j=m-1}$ es linealmente independiente pero no una base para V.

Solución.

Si $\sum_{i=1}^{m-1} a_i u_i \ = \theta$ por demostrar $a_i = 0 \ \forall\, i = 1, 2, \cdot\, \cdot\, \cdot\, \cdot, m-1$

De la hipótesis se tiene $\sum_{i=1}^{m-1} a_i(\, c\, v_i - b_i\, v_m) \ = \ \theta$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} a_j\, c\, v_j \ + (\sum_{i=1}^{m-1} a_i b_i)\, v_m = \theta$$

Como $\{v_i\}_{i=1}^{i=m}$ es L I. y $c \neq 0 \ \Rightarrow a_i = 0 \ \forall\, i = 1, 2, \cdot\, \cdot\, \cdot\, \cdot, m-1$ note que para estos valores se verifica que $\sum_{i=1}^{m-1} a_i b_i = 0$

No es una base pues son solo $m-1$ vectores y la dimensión de V es m.

Problema 15.

Discutir según sean los valores de los parámetros reales a y b el sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ variables, y resolver el sistema cuando sea compatible.

$$\begin{aligned} x_1 \quad + a\, x_{n+1} &= a \\ x_2 \quad + a\, x_{n+1} &= a \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_n + a\, x_{n+1} &= a \\ a\,(\sum_{i=1}^{n} x_i) + x_{n+1} &= b \end{aligned}$$

Solución.

$$|\, A\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a \\ a & a & a & \cdot & \cdot & \cdot & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1-na^2 \end{vmatrix}$$

$$\left| A \right| = 1 - n\,a^2$$

Si $1 - n\,a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ y b cualquier real el sistema tiene única solución que resulta ser $x_1 = x_2 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = x_n = \dfrac{(n-1)\,a}{n\,a^2 - 1}$ y $x_{n+1} = \dfrac{b - n\,a^2}{1 - n\,a^2}$

Si $a = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $b = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones (con un parámetro) que resulta ser: $x_i = \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_{n+1}),\ i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot \cdot, n;\ x_{n+1}$ parámetro.

Si $a = \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $b \neq 1 \Rightarrow r(A) = n \neq n + 1 = r(A : b) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Problema 16.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ calcular, siempre que se pueda B^{-1} si:

$B = 8\,A^{24} - 2\,A^{10} - A^8$

Solución.

Nótese que A es involutiva ($A^2 = I_3$), luego $B = 5I_3 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{5}I_3$

Problema 17.

Sea $f : P_3 \rightarrow P_2$ una función definida por $f(p(x)) = \dfrac{d}{dx}(p(x))$

a) Justificando, determine la matrz asociada a f con respecto a las bases

$$S_1 = \{1, 1-x, 1+x^2, x^3\} \rightarrow S_2 = \{x^2, x+2, 2\}$$

b) Hallar $\dfrac{d}{dx}(4+7x-6x^2+18x^3)$ ocupando la matriz que obtuvo en a).

Solución.

a) Note que f es una T.L. pues:

$$f(p(x)+q(x)) = [\,p(x)+q(x)\,]' = p'(x)+q'(x) = f(p(x))+f(q(x))$$

$$f(k\,p(x)) = [\,k\,p(x)\,]' = k\,p'(x) = k\,f(p(x))$$

Así,

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0 = 0\cdot x^2 + 0\cdot(x+2) + 0\cdot 2\\
f(1-x) &= -1 = 0\cdot x^2 + 0\cdot(x+2) + (-\tfrac{1}{2})\cdot 2\\
f(1+x^2) &= 2\,x = 0\cdot x^2 + 2\cdot(x+2) + (-2)\cdot 2\\
f(x^3) &= 3\,x^2 = 3\cdot x^2 + 0\cdot(x+2) + 0\cdot 2
\end{aligned}$$

de aquí se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Sea $p(x) = 4+7x-6x^2+18x^3$, como $[\,f(p(x))\,]_{S_2} = A\,[\,p(x)\,]_{S_1}$ se tiene

$$p(x) = 17\cdot 1 + (-7)\cdot(1-x) + (-6)\cdot(1+x^2) + 18\cdot x^3$$

$$[\,f(p(x))\,]_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17\\ -7\\ -6\\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54\\ -12\\ \frac{31}{2} \end{bmatrix}$$

luego, $$\frac{d}{dx}(4+7x-6x^2+18x^3) = 54\cdot x^2 + (-12)\cdot(x+2) + \frac{31}{2}\cdot 2$$

$$= 54\,x^2 - 12\,x + 7$$

Problema 18.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b\\ 0 & b & 3\\ a & b+2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a y b tal que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sea un vector propio de A.

b) Determine a y b tal que $t = -\frac{1}{2}$ sea un valor propio de A^{-1}(no invierta A)

c) Si $a = 0$ determine b de modo que A no sea diagonalizable.

Solución.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & b & 3 \\ a & b+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ a = -\frac{3}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

b) $t = -\dfrac{1}{2}$ valor propio de $A^{-1} \Rightarrow t = -2$ es un valor propio de $A,$ así

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & b & 3 \\ a & b+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee b = -2$$

c) Para que A no sea diagonalizable se debe pedir que un valor propio, tenga multiplicidad algebraica 2 o 3 en este caso, y luego verificar su multiplicidad geométrica(que debe ser diferente)

Notemos que $P_A(t) = (t-1)\,[\,(t-b)\,(t-1) - 3\,(b+2)\,] \Rightarrow t_1 = 1$ obligando

a que $t_2 = 1 \Rightarrow (1-b)\cdot 0 + 3(b+2) = 0 \Rightarrow b = -2,$ por tanto resulta

$t_1 = t_2 = 1$ para $b = -2$ cuya multiplicidad algebraica es 2 y su geométrica es 1

Por otra parte tambien se pueden obtener raíces repetidas imponiendo que

$(t-b)\,(t-1) - 3\,(b+2) = 0$ tenga su discriminante nulo, es decir

$\varDelta = (b+1)^2 - 4(-2b-6) = 0 \Rightarrow b = -5,$ en este caso:

$t_1 = 1,\ t_2 = t_3 = -2$ y su multiplicidad geométrica es 1.

Finalmente nótese que en este caso la multiplicidad algebraica de un valor propio no puede ser 3, pues como $t_1 = 1$ para que $t_2 = 1$ necesáriamente $b = -2$ y esto implica que $t_3 = -2$.

Problema 19.

Dado $W = \{ \ X \in M_{5\times 1} \ / \ A\,X = 0 \ \}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & c \\ -1 & a & b & -2 & -c \\ 2 & -2 & -2a & a-b+4 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Determine los valores de a, b y c de modo que la dimensión del subespacio W sea: i) 3 ii) 4.

b) Encuentre tres valores para a, b y c para los cuales la dimensión de W sea 2, exiba una base en tal caso.

Solución.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & c \\ -1 & a & b & -2 & -c \\ 2 & -2 & -2a & a-b+4 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & c \\ 0 & a-1 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a+2 & a-b & 4-2c \end{bmatrix}$$

Para obtener $dim\,W = 3,$ es necesario que se anule la fila 2 o la fila 3 (pero no ambas) en caso que sea la fila 2 $\Rightarrow a = 1 = b$ lo que obliga a que $c \neq 2$.

Si se anula la fila 3 $\Rightarrow a = 1 = b \ \wedge \ c = 2$ y en este caso la dimensión de W es 4.

b) Basta tomar por ejemplo: $a = b = c = 0$ (no es el único caso), así:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_4 \\ x_2 &= 2x_5 \\ x_3 &= -2x_5 \end{aligned}$$

$$\text{Así } \ \forall\, X \in W \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2x_4 \\ 2x_5 \\ -2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

una base para W resulta ser $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Problema 20.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal

a) Demuestre que $Ker\,T$, es un subespacio de V.

b) ¿Es verdad? que si $\{v_i\}_{i=1}^{i=n}$ es una base para V entonces $\{T(v_i)\}_{i=1}^{i=n}$ lo es para W.

Solución.

a) Como $T(\theta_V) = \theta_W \Rightarrow \theta_V \in Ker\,T \Rightarrow Ker\,T \neq \emptyset$.

$$\forall\ \alpha, \beta \in Ker\,T \Rightarrow \begin{array}{l} T(\alpha) = \theta_W \\ T(\beta) = \theta_W \end{array}$$

Sumando miembro a miembro resulta:

$$T(\alpha) + T(\beta) = \theta_W \Rightarrow T(\alpha + \beta) = \theta_W \Rightarrow (\alpha + \beta) \in Ker\,T,$$

Tambien se tiene

$$k\,T(\alpha) = k\,\theta_W = \theta_W \Rightarrow T(k\,\alpha) = \theta_W \Rightarrow (k\,\alpha) \in Ker\,T.$$

b) Es falso, pues basta tomar la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y si se supone que

$T(1,0,0) = 2\,T(0,1,0) \Rightarrow \{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}$ no es una base

para el espacio de llegada de T.

Problema 21.

Sea $W = \,<\{(1,1,1,1,1), (1,2,3,4,5), (1,4,9,16,25)\}>$ determine una base ortogonal para W.

Solución.

De inmediato por Gram Schmidt se tiene:

$\beta_1 = (1,1,1,1,1)$

$\beta_2 = (1,2,3,4,5) - \frac{15}{5}(1,1,1,1,1) = (-2,-1,0,1,2)$

$\beta_3 = (1,4,9,16,25) - 11(1,1,1,1,1) - 6(-2,-1,0,1,2)$

$\quad = (2,-1,-2,-1,2)$

luego una base ortogonal para W resulta

$$\{(1,1,1,1,1),(-2,-1,0,1,2),(2,-1,-2,-1,2)\}$$

Problema 22.

Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$T(x,y,z,t) = (x,\ \tfrac{1}{8}(-3x-y+3z-t),\ \tfrac{1}{8}(x+3y-z-t),\ \tfrac{1}{8}(-7x-y-z+3t))$$

a) Determine la matriz A representativa de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$

b) Determine los valores y vectores propios de A.

c) Justifique ¿porque? A es diagonalizable y calcule $\lim_{n\to\infty} A^n$

Solución.

a) De inmediato $A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ -7 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $t_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = (21,-2,5,-30)$

$t_2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \alpha_2 = (0,1,1,1)$

$t_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_3 = (0,1,1,-2)$

$t_4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_4 = (0,-1,1,0)$

c) A, es diagonalizable pues existe una base de vectores propios para $\mathbb{R}^4$

Note que $A^n = P\,D^n P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -30 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

tomando el límite resulta finalmente

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{21} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{30}{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 23.

Determine $k,$ (si es posible) de modo que los conjuntos

$$S_1 = \{\, (1,2,\,-1,1),\ (2,0,1,1), (3,k,0,2)\,\}$$

$$S_2 = \{\, (\,-4,4,\,-5,\,-1),\ (0,\,-4,3,\,-1)\,\}$$

generen al mismo subespacio de $\mathbb{R}^4$.

Solución.

Como S_2 tiene solo 2 vectores L.I., entonces genera un subespacio de dimensión 2 por tanto debemos probar dos cosas:

1) Determinar k de modo que S_1 sea L.D. y que para dicho valor sean exactamente 2 vectores L.I.

2) Se debe probar que los 2 generadores L.I. de S_1 generen al mismo espacio que los dos generadores de S_2 para el valor de k encontrado.

En efecto 1)

$$x_1(1,2,\,-1,1) + x_2\,(2,0,1,1) + x_3(3,k,0,2) = (0,0,0,0)$$

$x_1, x_2,$ y x_3 no todos nulos a la vez implica $k = 2$

2) Por probar que

$$\Big\langle\{(1,2,\,-1,1),(2,0,1,1)\}\Big\rangle = \Big\langle\{\,(\,-4,4,\,-5,\,-1),\ (0,\,-4,3,\,-1)\,\}\Big\rangle$$

$$\forall\,(x,y,z,t) \in \Big\langle\{(1,2,\,-1,1),(2,0,1,1)\}\Big\rangle \Leftrightarrow$$

$$2x + y - 4t = 0\ \wedge\ 2x - z - 3t = 0(1)$$

$$\forall\,(x,y,z,t) \in \Big\langle\{\,(\,-4,4,\,-5,\,-1),\ (0,\,-4,3,\,-1)\,\}\Big\rangle\ \Leftrightarrow$$

$$2x + y - 4t = 0 \ \wedge \ 2x - z - 3t = 0 (2)$$

Como $(1) = (2)$ entonces ambos conjuntos generan al mismo subespacio.

Problema 24.

Sea $M_{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$,

a) Sea $W \subseteq M_{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$, definido por

$$W = \{ A \in M_{n\times n} \ / \ trA = 0 \ \}$$

demuestre que és, un subespacio de $M_{n\times n}$ y luego determine su dimensión.

b) Demuestre que $M_{n\times n}$ es suma directa de los conjuntos: de las matrices simétri cas y de las antisimétricas.

Demostración.

a) i) $0_M \in W$ pués $tr\,(0_M) = 0 \ \Rightarrow W \neq \phi$.

ii) $\forall\, A, B \in W \Rightarrow trA = 0 \ \wedge \ trB = 0$

Como $tr(A+B) = trA + trB = 0 + 0 = 0 \ \Rightarrow \ (A+B) \in W$.

iii) $\forall\, A \in W \Rightarrow trA = 0 \ \wedge \ \forall\, k \in \mathbb{R}$ se tiene

$tr(kA) = k\, trA = k \cdot 0 = 0 \ \Rightarrow \ A \in W$.

Por tanto W es un subespacio de $M_{n\times n}$.

b) Se deben probar dos cosas, siendo W_1, W_2 subespacios de $M_{n\times n}$, con

$W_1 = \{A \in M_{n\times n} / \ A^t = A\} \ \wedge \ W_2 = \{A \in M_{n\times n} / \ A^t = -A\}$

1) $W_1 \cap W_2 = \{\theta\} \ \wedge$ 2) $W_1 + W_2 = M_{n\times n}$

$1)$ $\forall\, A \in (W_1 \cap W_2) \Leftrightarrow \ A \in W_1 \ \wedge A \in W_2 \ \Leftrightarrow \ A^t = A \ \wedge \ -A^t = A$ sumando estas dos ecuaciones miembro a miembro resulta $2\,A = 0_M \ \Leftrightarrow \ A = 0_M \ \Rightarrow$ $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$.

$2)$ Como $\forall\, A \in M_{n\times n} \ \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$ en donde $\frac{1}{2}(A + A^t) \in W_1 \ \wedge \ \frac{1}{2}(A - A^t) \in W_2 \Rightarrow W_1 + W_2 = M_{n\times n}$.

Problema 25.

Dado el sistema $AX = b$, $A_{3\times 5}$ que tiene por solución a

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) Determine una base ortogonal para $Ker\,A$.

b) Describa el espacio $Im\,A$.

c) Determine las condiciones entre a, b, c, d y e de modo que $[a \quad b \quad c \quad d \quad e]^t \in Im\,A^t$

Solución.

a) Una base para el $Ker\,T$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ por Gram Schmidt

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};\ \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{10}{14} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

luego una base ortogonal es $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

b) Como $dim\,Ker\,T = 2 \Rightarrow dim\,Im\,T = 5 - 2 = 3 \Rightarrow Im\,T = \mathbb{R}^3$.

c)

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr:c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & -2 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ -2 & 1 & -2 & e \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr:c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 3a+c+2d \\ 0 & 0 & 1 & d \\ -2 & 1 & -2 & 2a-b+2d+e \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow 3a+c+2d=0 \ \wedge \ 2a-b+2d+e=0$$

Problema 26.

Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios en P_2. Averiguar si:

$$(p(x);q(x)) = p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1)$$

es un producto interior en P_2.

Solución.

No es un producto interior pués por ejemplo, si $p(x) = -x + x^2 \Rightarrow$

$(p(x);p(x)) = p(0)\,p(0) + p(1)\,p(1) = 0^2 + (-1+1)^2 = 0 \ \wedge \ p(x) \neq 0$

lo que contradice que si $(p(x);p(x)) = 0 \Rightarrow p(x)$ debe ser 0.

Problema 27.

Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal para un espacio V con producto interior. Demuestre que si α es un vector cualquiera de V, entonces

$$\|\alpha\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\alpha;\alpha_k)^2$$

Solución.

$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha;\alpha_k)\alpha_k$ note que $a_k = (\alpha;\alpha_k)$

$\|\alpha\|^2 = (\alpha;\alpha) = (\alpha; \sum_{k=1}^{n} (\alpha;\alpha_k)\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha;\alpha_k)(\alpha;\alpha_k)$ por propiedad

distributiva del producto interno, por tanto se tiene que $\|\alpha\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\alpha;\alpha_k)^2$

Problema 28.

Sea $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Factorice A en QR

b) Aprovechando la factorización hecha en a) resuelva el sistema $AX = b$ en que $b^t = [\,-10 \quad 20 \quad -10 \quad 10\,]$.

Solución.

a) Por Gram-Schmidt

$\beta_1 = (1,0,1,0)$

$\beta_2 = (1,1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) = \frac{1}{2}(1,2,\,-1,0)$

$\beta_3 = (0,1,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) - \frac{1}{6}(1,2,\,-1,0) = \frac{1}{3}(\,-2,2,2,3)$

$\beta_4 = (0,1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) - \frac{1}{6}(1,2,\,-1,0) - \frac{4}{21}(\,-2,2,2,3)$

$= \frac{2}{7}(\,-1,1,1-2)$

Así, Q resulta

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{21}} & \frac{-2}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} \text{ y } R = Q^tA = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{7}{\sqrt{21}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}$$

b) $AX = b \Leftrightarrow QRX = b \Leftrightarrow RX = Q^{-1}b = Q^tb = \begin{bmatrix} \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{40}{\sqrt{6}} & \frac{70}{\sqrt{21}} & 0 \end{bmatrix}^t$

De donde :
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -20 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 &= 40 \\ 7x_3 + 4x_4 &= 70 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, facilmente se obtiene: $x_1 = -20,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10,\ x_4 = 0$

Problema 29.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una T. L. definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Describa la imagen y el nucleo de T.

b) Describa el nucleo de la transformación lineal cuya matriz representativa es A^t

Solución.

a) Sea $Y \in Im\,T \Leftrightarrow$

$$\exists\, a_1, a_2 \text{ y } a_3 \;/\; Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrrcc} 1 & 3 & 4 & \vdots & x \\ 3 & 4 & 7 & \vdots & y \\ -2 & 2 & 0 & \vdots & z \end{array}\right] \sim \cdot\cdot\cdot \sim \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 4 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & \dfrac{3x-y}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \dfrac{2x+z}{8} + \dfrac{y-3x}{5} \end{array}\right]$$

La existencia de a_1, a_2 y a_3 obliga a $\dfrac{2x+z}{8} + \dfrac{y-3x}{5} = 0$ de donde se obtiene $14\,x - 8y - 5z = 0$ que representa a un plano por el origen.

*También es válido el argumento siguiente: la imagen está generada por los vectores columna de A y como de los tres dos son L.I. entonces generan un plano por el origen.

Para el nucleo de T, $\forall\, X \in Ker\,T \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;/\; \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right] \sim \cdot\cdot\cdot$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = y = -z \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -z \\ -z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que és la ecuación paramétrica de una recta que pasa por el origen.

b) También es una recta por el origen, que es perpendicular al plano generado por la imagen de A, pués $Ker\,A^t = (Im\,A)^{\perp}$.

Procediendo en forma similar a la parte a) se llega

$\forall\, X \in Ker\,T \Leftrightarrow X = t \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix}$, note que la dirección de esta recta coincide con el vector normal del plano obtenido en la parte a) y que afirma lo dicho anteriormente.

Problema 30.

Sea $T : M_{2\times 3} \rightarrow M_{3\times 2}$ una función definida por

$$T(A) = (A\,B)^t;\ \forall\, A \in M_{2\times 3}\,,\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Pruebe que T es una transformación lineal.

b) Determine una base para el $Ker\,T$.

c) Encuentre la matriz representativa de T con respecto a las bases: canónicas de $M_{2\times 3}$ y a la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución.

a) i) $T(A_1 + A_2) = [(A_1 + A_2)B]^t = B^t(A_1 + A_2)^t = B^t(A_1^t + A_2^t)$

$$= B^t A_1^t + B^t A_2^t = (A_1\,B)^t + (A_2\,B)^t = T(A_1) + T(A_2)$$

ii) $T(kA) = (kAB)^t = B^t(kA)^t = k\,B^t A^t = k(AB)^t = k\,T(A)$.

b) $\forall\, A \in Ker\,T \,/\, T(A) = 0 \Rightarrow (A\,B)^t = 0 \Leftrightarrow AB = 0$

con $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$, de donde resulta **dos** sistemas homogeneos del tipo

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$$

cuyas soluciones son: $x_1 = -2x_2,\ x_3 = 0;\ y_1 = -2y_2,\ y_3 = 0$ por tanto

$$A = \begin{bmatrix} -2x_2 & x_2 & 0 \\ -2y_2 & y_2 & 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

luego una base del $Ker\,T$ resulta $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) Como $T(A) = B^t A^t;\ \forall\, A \in M_{2\times 3}\,,\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$T(\epsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 - 2 \cdot \mu_3 + 1 \cdot \mu_4 - 1 \cdot \mu_5 + 1 \cdot \mu_6$$

$$T(\epsilon_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_3 + 2 \cdot \mu_4 - 2 \cdot \mu_5 + 2 \cdot \mu_6$$

$$T(\epsilon_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\cdot\mu_1 + 1\cdot\mu_2 - 1\cdot\mu_3 + 1\cdot\mu_4 - 1\cdot\mu_5 - 1\cdot\mu_6$$

$$T(\epsilon_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\cdot\mu_1 - 2\cdot\mu_2 + 1\cdot\mu_3 - 1\cdot\mu_4 + 1\cdot\mu_5 - 1\cdot\mu_6$$

$$T(\epsilon_5) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\cdot\mu_1 - 4\cdot\mu_2 + 2\cdot\mu_3 - 2\cdot\mu_4 + 2\cdot\mu_5 - 2\cdot\mu_6$$

$$T(\epsilon_6) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\mu_1 - 1\cdot\mu_2 + 1\cdot\mu_3 - 1\cdot\mu_4 - 1\cdot\mu_5 + 1\cdot\mu_6$$

donde:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mu_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mu_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mu_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\mu_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

luego la matriz de transformación pedida es

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 31.

a) Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y Q y B matrices tales que $A = Q^{-1}BQ$, demuestre que $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ A^k = Q^{-1}B^kQ$

b) Si A es diagonalizable, existe $Q = P$ tal que $A = P^{-1}DP$

Sea $p(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ se define $p(A)$ por

$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I_n$$

i) Demuestre que si λ es un valor propio de A, entonces $p(\lambda)$ es un valor propio de $p(A)$.

ii) Demuestre que $p(A)$ es diagonalizable

iii) Aproveche $A = P^{-1}DP$ para resolver en forma apropiada $AX = b$

Solución.

a) Sea $k \in \mathbb{Z}$ con $k > 0$.

Por inducción, para $k = 1 \Rightarrow A = Q^{-1}BQ$ lo que es verdadero por hipótesis

Sea válido para k, o sea se cumple $A^k = Q^{-1}B^kQ \qquad (H.I.)$

Por demostrar para $k+1$, o sea $A^{k+1} = Q^{-1}B^{k+1}Q \qquad (T.)$

En efecto,
$$A^{k+1} = A^kA = Q^{-1}B^kQ \cdot Q^{-1}BQ = Q^{-1}B^k(Q\,Q^{-1})BQ$$
$$= Q^{-1}B^kBQ = Q^{-1}B^{k+1}Q$$

Si $k = 0$, se cumple $A^0 = I_n = Q^{-1}\,Q = Q^{-1}B^0\,Q$.

Si $k < 0$, asumiendo que A es no singular(y por tanto B lo és), entonces $m = -k > 0$ se tiene: $A^m = Q^{-1}B^mQ$ (ya demostrado) entonces
$A^k = (A^m)^{-1} = (Q^{-1}B^mQ)^{-1} = Q^{-1}(B^m)^{-1}Q = Q^{-1}B^kQ.$

b) i) Si λ es un valor propio de A asociado al vector propio v, entonces
$$\begin{aligned}
p(A)\,v &= (A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + c_1A + c_0I_n)\,v \\
&= (A^nv) + c_{n-1}(A^{n-1}v) + \cdot\cdot\cdot + c_1(Av) + c_0v \\
&= \lambda^nv + c_{n-1}\lambda^{n-1}v + \cdot\cdot\cdot + c_1\lambda v + c_0v \\
&= (\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + c_1\lambda + c_0)\,v \\
&= p(\lambda)\,v
\end{aligned}$$
con lo que $p(\lambda)$ es un valor propio de $p(A)$.

ii) Como A es diagonalizable entonces existe P tal que $A = P^{-1}DP$ luego
$$\begin{aligned}
p(A) &= A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + c_1A + c_0I_n \\
&= (P^{-1}DP)^n + c_{n-1}(P^{-1}DP)^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + c_1P^{-1}DP + c_0P^{-1}P \\
&= P^{-1}D^nP + c_{n-1}P^{-1}D^{n-1}P + \cdot\cdot\cdot + c_1P^{-1}DP + c_0P^{-1}P \\
&= P^{-1}(D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + c_1D + c_0I_n)P \\
&= P^{-1}p(D)P
\end{aligned}$$
Lo que implica que $p(A)$ es diagonalizable, pués
$$p(D) = D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + c_1D + c_0I_n$$ es diagonal por ser una combinación lineal de matrices diagonales.

iii) Sea $AX = b$ un sistema. Asumiendo que $A = P^{-1}DP$ y que D es diagonal, se cumple: $AX = b \Leftrightarrow P^{-1}DPX = b \Leftrightarrow DPX = Pb \Leftrightarrow D(PX) = Pb \Leftrightarrow$ $DY = Pb \ \wedge \ PX = Y$.

Pero como D es diagonal, resolver $DY = Pb$ para Y es muy simple de resolver pués, si

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ y } \ Pb = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

entonces $\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$, donde para cada $1 \le i \le n$ se tiene

$$d_i = \begin{cases} \frac{c_i}{b_{ii}} & \text{si } \ b_{ii} \neq 0 \\ y_i \in \mathbb{R} \text{ arbitrario} & \text{si } \ b_{ii} = 0 \end{cases}$$

Obtenido ya Y para resolver $PX = Y$ basta con $X = P^{-1}Y$, ya que P^{-1} existe y se asume conocida.

Problema 32.

Sea T la transformación lineal cuya matriz con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ es A.

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -66 & -44 & -33 \\ 0 & 13 & 21 & -15 \\ 1 & -15 & -21 & 12 \\ 2 & -18 & -22 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre una base S para $\mathbb{R}^4$ con respecto de la cuál la matriz representativa de T, sea diagonal.

b) Calcule $T^{10}(61, -7, 14, 15)$.

Solución.

a) Valores propios: $t_1 = 5, \ t_2 = 2, \ t_3 = t_4 = 4$

Vectores propios asociados, respectivamente:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} -30 \\ -7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \ \text{y} \ \ \alpha_4 = \begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

luego la base pedida es $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

b) Expresamos el vector $(61, -7, 14, 15)$ en C.L. de los vectores propios de la base S.

$$\begin{bmatrix} 61 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -30 \\ -7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(\begin{bmatrix} 61 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}) = 2\,T(\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}) + 2\,T(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}) + 1\,T(\begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix})$$

$$T(\begin{bmatrix} 61 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}) = 2\cdot 5\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\cdot 2\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\cdot 4\begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T^2(\begin{bmatrix} 61 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}) = 2\cdot 5^2\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\cdot 2^2\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\cdot 4^2\begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

. . . .

$$T^{10}(\begin{bmatrix} 61 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}) = 2\cdot 5^{10}\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\cdot 2^{10}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\cdot 4^{10}\begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{10}(\begin{bmatrix} 61 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 22\cdot 5^{10} + 39\cdot 4^{10} \\ -6\cdot 5^{10} - 6\cdot 2^{10} + 5\cdot 4^{10} \\ 8\cdot 5^{10} + 6\cdot 2^{10} \\ 8\cdot 5^{10} + 6\cdot 2^{10} + 3\cdot 4^{10} \end{bmatrix}$$

Problema 33.

a) A es una matriz de 5×5 con dos valores propios. Un espacio propio es tridimensional y el otro bidimensional. ¿Es A diagonalizable? ,¿porque?.

b) Demuestre que si u es un vector propio de AB y $Bu \neq \theta$, entonces Bu es un vector propio de BA.

c) Sea F una forma cuadrática dada por $F(\alpha) = X^t A X$, siendo X el vector coordenada del vector α con respecto a $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, donde A es una matriz simétrica diagonalizable.

Sean $t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ los valores propios de A.

Fes definida positiva $\Leftrightarrow\ t_i > 0,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$

Fes definida negativa $\Leftrightarrow\ t_i < 0,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$

Fes semidefinida positiva $\Leftrightarrow\ t_i \geq 0,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$ y algún $t_i = 0$

Fes semidefinida negativa $\Leftrightarrow\ t_i \leq 0,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$ y algún $t_i = 0$

Fes indefinida $\Leftrightarrow$ existen $t_i > 0$ y $t_j < 0$

Según lo anterior encuentre la forma cuadrática asociada a las siguientes matrices y clasifíquelas

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \frac{3}{2} \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución.

a) Si A es una matriz de 5×5 con dos valores propios, entonces un valor propio es de multiplicidad algebraica 3 y el otro de multiplicidad algebraica 2 y se dice que un subespacio es de dimensión 3 y el otro de dimensión 2, con lo que las multiplicidades algebraica y geométrica de ambos valores propios son iguales, por tanto A **es diagonalizable.**

b) Por hipótesis $AB\,u = tu \Leftrightarrow BA(B\,u) = B(tu) \Leftrightarrow BA(B\,u) = t\,B(u)$ y además $Bu \neq \theta$, entonces Bu es un vector propio de BA.

c) Para A, sus valores propios son: $t_1 = t_2 = -1,\ t_3 = 8$ y además el valor propio -1 es de multiplicidad geométrica 2 por tanto A es diagonalizable, entonces F es indefinida y

$$F(\alpha) = X^t AX = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8\,x_1x_3 + 4\,x_2x_3$$

Para B, sus valores propios son: $t_1 = t_2 = \frac{3}{2},\ t_3 =\ t_4 = \frac{13}{2}$ y ambos valores propios tienen multiplicidad geométrica 2 igual a su multiplicidad algebraica, entonces B es diagonalizable, y como los valores propios son todos positivos F, definida positiva y

$$F(\alpha) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 3\,x_1x_2 - 4\,x_1x_4 + 4\,x_2x_3 + 3x_3x_4$$

Para C, analogamente sus valores propios son: $t_1 = 1,\ t_2 = 4$ y $t_3 = 7$ todos distintos entre si, luego C es diagonalizable, y por tanto F es definida positiva y

$$F(\alpha) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4\,x_1x_2 + 4\,x_2x_3$$

Problema 34.

Sea $T_1 : M_{2\times 2} \rightarrow M_{2\times 2}$ una T. L. definida por

$$T_1(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

y sea $T_2 : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ otra T.L. definida por la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con respecto a la base $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

a) Determine los valores y vectores propios de T_1, ¿Es diagonalizable? Justifique.

b) Usando cambio de base determine los valores y vectores propios de $T_1 \circ T_2$

Solución.

a) Sea A la matriz representativa de T_1 con respecto a canónicas de $\mathbb{R}^4$, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Valores propios: $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = -1$ y $t_4 = -2$

Vectores propios:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A es diagonalizable pués existe una base de vectores propios con respecto de la cual, T_1 puede ser representada por una matriz diagonal

b) Sea C, la matriz representativa de T_2 con respecto $S' = \{$ canónicas de $\mathbb{R}^4\}$ y como

$$\begin{array}{ccccc} & S & \xrightarrow{B} & S & \\ P & \downarrow & & \downarrow & P \Rightarrow \quad C = PBP^{-1} \\ & S' & \xrightarrow[C]{} & S' & \end{array}$$

donde $P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&0\\1&-1&0&0\end{bmatrix}$ de donde

$$C=\begin{bmatrix}3&-2&3&-1\\2&-3&5&-1\\0&-1&6&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}$$

Con lo que, la matriz de $T_1\circ T_2$ es $A\,C=\begin{bmatrix}0&-2&12&-4\\3&-3&9&-3\\2&-1&-7&3\\0&0&2&-1\end{bmatrix}$

Valores propios de AC: $t_1=-0.510+2.052\,i$; $t_2=-0.1362$

$t_3=-9,8429$ y $t_4=-0.510-2.052\,i$

Vectores propios:

$$v_1=\begin{bmatrix}1.611+6,685\,i\\6.740+6.209\,i\\0.244+1.026\,i\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}0.287\\0.610\\0.431\\1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}6.489\\3.408\\-4.421\\1\end{bmatrix}\text{ y}$$

$$v_4=\begin{bmatrix}1.611-6,685\,i\\6.740-6.209\,i\\0.244-1.026\,i\\1\end{bmatrix}$$

Problema 35.

Sean $S_1=\{1,cost,cos^2t,\ldots,cos^6t\}$ y $S_2=\{1,\,cos\,t,\,cos\,2t,\,\ldots,cos\,6t\}$.

Suponga las siguientes identidades trigonométricas

$cos\,2t=2\,cos^2t-1$

$cos\,3t=4\,cos^3t-3\,cos\,t$

$cos\,4t=8\,cos^4t-8\,cos^2t+1$

$cos\,5t=16\,cos^5t-20\,cos^3t+5\,cos\,t$

$cos\,6t=32\,cos^6t-48\,cos^4t+18\,cos^2t-1$

Sea W el subespacio generado por las funciones en S_1

a) Escriba los vectores coordenada de los vectores de S_2 con respecto a S_1 y úselos para demostrar que S_2 es un conjunto linealmente independiente en W.

b) Explique por qué S_2 es una base para W.

c) Determine la matriz de cambio de base de S_2 a S_1.

Solución.

a) Sean: $\epsilon_1 = 1,\ \epsilon_2 = cost, \epsilon_3 = cos^2 t, \dots, \epsilon_7 = cos^6 t$, entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \quad 1\cdot\epsilon_1 + 0\cdot\epsilon_2 + 0\cdot\epsilon_3 + ,\dots, + 0\cdot\epsilon_7 \\
cost &= \quad 0\cdot\epsilon_1 + 1\cdot\epsilon_2 + 0\cdot\epsilon_3 + ,\dots, + 0\cdot\epsilon_7 \\
cos2t &= -1\cdot\epsilon_1 + 0\cdot\epsilon_2 + 2\cdot\epsilon_3 + ,\dots, + 0\cdot\epsilon_7 \\
cos3t &= \quad 0\cdot\epsilon_1 - 3\cdot\epsilon_2 + 0\cdot\epsilon_3 + \ 4\cdot\epsilon_4 + ,\dots, + 0\cdot\epsilon_7 \\
cos4t &= \quad 1\cdot\epsilon_1 + 0\cdot\epsilon_2 - 8\cdot\epsilon_3 + \ 0\cdot\epsilon_4 + \ 8\cdot\epsilon_5 + ,\dots, + \ 0\cdot\epsilon_7 \\
cos5t &= \quad 0\cdot\epsilon_1 + 5\cdot\epsilon_2 + 0\cdot\epsilon_3 - 20\cdot\epsilon_4 + \ 0\cdot\epsilon_5 + 16\cdot\epsilon_6 + \ 0\cdot\epsilon_7 \\
cos6t &= -1\cdot\epsilon_1 + 0\cdot\epsilon_2 + 18\cdot\epsilon_3 + 0\cdot\epsilon_4 - 48\cdot\epsilon_5 + \ 0\cdot\epsilon_6 + 32\cdot\epsilon_7
\end{aligned}$$

$$[1]_{S_1} = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix},\ [cost]_{S_1} = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix},\ [cos2t]_{S_1} = \begin{bmatrix} -1\\0\\2\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix},\ [cos3t]_{S_1} = \begin{bmatrix} 0\\-3\\0\\4\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$[cos4t]_{S_1} = \begin{bmatrix} 1\\0\\-8\\0\\8\\0\\0 \end{bmatrix},\ [cos5t]_{S_1} = \begin{bmatrix} 0\\5\\0\\-20\\0\\16\\0 \end{bmatrix},\ [cos6t]_{S_1} = \begin{bmatrix} -1\\0\\18\\0\\-48\\0\\32 \end{bmatrix}$$

Como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 7 \ \text{ por tanto}$$

S_2 es L.I.

b) Son LI. , pertenecen al espacio generado por S_1 por la parte a) y son 7 , que és la dimensión de W.

c) La matriz de cambio de base es la matriz A, mostrada en la parte a).

Problema 36.

a) Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$, $p \leq n$; un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$. Verifique la desigualdad de $Bessel$, que se cumple para todo α en $\mathbb{R}^n$:

$$\| \alpha \|^2 \geq \sum_{i=1}^{p} (\alpha; \alpha_i)^2$$

b) Demuestre que la linea de mínimos cuadrados para los datos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2),$ $\ldots,$ (x_n, y_n) debe pasar por $(\overline{x}, \overline{y})$ donde $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

Demostración.

a) Extendiendo el conjunto ortonormal dado a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ se tiene $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n\}$ así $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^n$,

$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \Rightarrow x_i = (\alpha; \alpha_i)$ luego $\alpha = \sum_{i=1}^{n} (\alpha; \alpha_i)\alpha,$ entonces

$$\| \alpha \|^2 = (\alpha; \alpha) = (\alpha; \sum_{i=1}^{n} (\alpha; \alpha_i)\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha; \alpha_i)(\alpha; \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha; \alpha_i)^2$$

por tanto, la desigualdad

$$\| \alpha \|^2 \geq \sum_{i=1}^{p} (\alpha; \alpha_i)^2 \quad \text{es evidente.}$$

b) La linea de mínimos cuadrados para los datos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2),$ $\ldots,$ (x_n, y_n) está dada por $y = b + ax,$ en donde

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}, X = (A^t A)^{-1} A^t Y,\ A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix},\ \text{así}$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2},\quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Demostraremos que $(\overline{x}, \overline{y})$ satisface a (1) es decir, que $a\overline{x} + b = \overline{y}$, en efecto

$$a\overline{x} + b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}$$

Problema 37.

En el espacio vectorial P_2 sobre $\mathbb{R}$, considere el producto interno

$$(p(t); q(t)) = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt$$

a) Calcular $(p(t); q(t))$ con $p(t) = 2 + t,\;\; q(t) = 4 - 3t + t^2$

b) Determine la matriz del producto dado respecto a la base canónica de P_2 y compruebe el cálculo hecho en a) ocupando dicha matriz.

c) Determine la proyección ortogonal de $1 + t$ sobre el subespacio W de P_2 generado por $p(t) = 2 + t$ y $q(t) = 4 - 3t + t^2$.

Solución.

a) $(p(t); q(t)) = \int_0^1 (2 + t)(4 - 3t + t^2)\, dt = \int_0^1 \left(8 - 2t - t^2 + t^3\right) dt = \dfrac{83}{12}$

b) La base canónica de P_2 es, $S = \{1, t, t^2\}$ entonces

$$C = \begin{bmatrix} (1;1) & (1;t) & (1,t^2) \\ (t;1) & (t,t) & (t;t^2) \\ (t^2;1) & (t^2;t) & (t^2,t^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Comprobando la parte a) note que $[2 \quad 1 \quad 0]\, C \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{83}{12}$

c) <u>Forma 1</u>

$proy_W(1 + t) = (1 + t; f_1) f_1 + (1 + t; f_2) f_2$, donde $\{f_1, f_2\}$ es una base ortonormal para W.

Por Gram-Schmidt

$\overline{f_1} = 2 + t$

$\overline{f_2} = 4 - 3t + t^2 - \frac{83}{12} \cdot \frac{3}{19}(2 + t) = \frac{1}{76}(138 - 311t + 76t^2)$, así

$\{\frac{1}{2{,}517}(2+t), \frac{1}{68{,}52}(138-311t+76t^2)\}$ es una base ortonormal para W

luego, $proy_W(1+t) = \Big(1+t; \frac{1}{2{,}517}(2+t)\Big)\frac{1}{2{,}517}(2+t) +$

$$\Big(1+t; \frac{1}{68{,}52}(138-311t+76t^2)\Big)\frac{1}{68{,}52}(138-311t+76t^2)$$

$proy_W(1+t) = \frac{1}{(2{,}517)^2}\frac{23}{6}(2+t) + \frac{1}{(68{,}52)^2}(-7.83)(138-311t+76t^2)$

$proy_W(1+t) = 0.979 + 1.124\,t - 0.126\,t^2$

<u>Forma 2</u>

Ocupando C

$(\alpha - proy_W\alpha; AX) = 0,\ proy_W\alpha = AX'$

$(AX)^t C(\alpha - proy_W\alpha) = 0 \Leftrightarrow X^t(A^tC\alpha - A^tCAX') = 0$ de donde se tiene

$A^tCAX' = A^tC\alpha \qquad (*)$

Como $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ y $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

De $(*)$ efectuando los cálculos respectivos se obtiene $X' = \begin{bmatrix} 0.7437 \\ -0.1267 \end{bmatrix}$

finalmente, $proy_W(1+t) = AX' = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1.123 \\ -0.126 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$proy_W(1+t) = 0.98 + 1.124\,t - 0.126\,t^2$

Problema 38.

a) Sea A una matriz de $m \times n$, demuestre que $Ker\,A = Ker\,A^tA$

b) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Encuentre **una** solución por mínimos cuadrados de $AX = b$ y calcule el error de mínimos cuadrados asociado, comente.

Repita para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Demostración.

a) $(\Rightarrow)$ Si $AX=0$, entonces $A^tAX=A^t0=0$. Esto demuestra que $Ker\,A$ está contenido en $Ker(A^tA)$.

$(\Leftarrow)$ Si $A^tAX=0$, entonces $X^tA^tAX=X^t0=0$. Así que $(AX)^t(AX)=0$ (lo que implica que $\|AX||^2=0$) y por lo tanto $AX=0$. Esto demuestra que $Ker(A^tA)$ está contenido en $Ker\,A$.

b) $AX=b \Leftrightarrow A^tAX=A^tb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 9 & 83 & 28 \\ 0 & 28 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -65 \\ -28 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 0 & -3 \\ 9 & 83 & 28 & -65 \\ 0 & 28 & 14 & -28 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

Así la solución general por mínimos cuadrados es

$$x_1=2+\frac{3}{2}x_3,\ \ x_2=-1-\frac{1}{2}x_3,\ \ x_3 \text{ parámetro}$$

Para una solución particular, tomemos por ej. $x_3=0$ para obtener

$X_p=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, para encontrar el error de mínimos cuadrados, calculamos

$b'=AX_p=\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$, así que $||b-b'||=0$. El error de mínimos cuadrados es cero porque sucede que b está en la $Im\,A$.

Repitiendo el proceso, se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 0 & 7 \\ 9 & 83 & 28 & 5 \\ 0 & 28 & 14 & -8 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{67}{21} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$X_p=\begin{bmatrix} \frac{67}{21} \\ -\frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix},\ b'=AX_p=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{67}{21} \\ -\frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{85}{21} \\ \frac{37}{21} \\ \frac{25}{21} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$||b-b'||=\left|\left|\begin{bmatrix} \frac{20}{21} \\ -\frac{100}{21} \\ \frac{80}{21} \end{bmatrix}\right|\right|=\sqrt{38.09}=6.172$$

Problema 39.

Encontrar la forma de la transformación lineal T que representa la proyección ortogonal de un punto en el espacio sobre el plano $ax+by+cz=0$ y su matriz representativa con respecto a alguna base de $\mathbb{R}^3$, también demuestre que $T\circ T=T$.

¿Es lineal la transformación si el plano es de la forma $ax+by+cz+d=0$, con $d\neq 0$?

Solución.

<u>Primera forma</u>

Suponiendo $a\neq 0,\ x=\ -\dfrac{b}{a}y-\dfrac{c}{a}z=k\,y+p\,z\Rightarrow \alpha=\begin{bmatrix}k\,y+p\,z\\ y\\ z\end{bmatrix}$

$\alpha=y\begin{bmatrix}k\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}p\\0\\1\end{bmatrix}$, por tanto el plano esta generado por: $\begin{bmatrix}k\\1\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}p\\0\\1\end{bmatrix}$, luego

$Im\,A=W\Rightarrow A=\begin{bmatrix}k & p\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$ Así $T(X)=A(A^tA)^{-1}A^tX,\ \forall\,X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

<u>Segunda Forma</u>

$W^{\perp}=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right\}\right\rangle\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},$ Así $T(X)=[I_3-\ A(A^tA)^{-1}A^t]X$, con $a\neq 0\ \vee\ b\neq 0\ \vee\ c\neq 0.$

De inmediato de aquí, la matriz representativa de T es

$$\tfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -\,ab & -\,ac\\ -\,ab & a^2+c^2 & -\,bc\\ -\,ac & -\,bc & a^2+b^2\end{bmatrix}$$

$T\circ T=[A(A^tA)^{-1}A^t]^2=A(A^tA)^{-1}A^tA(A^tA)^{-1}A^t=A(A^tA)^{-1}A^t=T$

Si el plano no pasa por el origen no se verifica que $T(\theta)=\theta$, luego no es una $T.L.$

Problema 40.

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$T(X) = AX,\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2k \\ k & 1 & k \\ 2k & 2k & 1 \\ 2k+1 & 3k & 2k+1 \end{bmatrix}$$

donde k es un parámetro real dado.

a) Demuestre que para (a, b, c, d) un vector de la imagen, los valores a, b, c y d satisfacen una ecuación homogenea independiente de k que define a la $Im\,T$.

b) Determine $r(T)$ y la nulidad de T.

c) Halle los valores de k para los cuales se tiene que $r(T) < 3$.

d) Calcule $T^{-1}(1, 0, -1, 0)$ para $k = 1$.

Solución.

a) Recordemos que la Imagen de T esta generada por los vectores columna de A, entonces

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & k & 2k & a \\ k & 1 & 1 & b \\ 2k & 2k & 1 & c \\ 2k+1 & 3k & 2k+1 & d \end{array}\right]$$

Es suficiente hacer $\boldsymbol{F_4} - F_1 - F_3$ para obtener $d - a - c = 0$.

b) Como $r(T) = r(A)$, además de la operación anterior hacemos $\boldsymbol{F_1} + F_2 + F_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 2k \\ k & 1 & k \\ 2k & 2k & 1 \\ 2k+1 & 3k & 2k+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3k+1 & 3k+1 & 3k+1 \\ k & 1 & k \\ 2k & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$r(T) = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \eta(T) = 3 - r(T) = 3 - 2 = 1$$

Si $k \neq -\frac{1}{3}$ haciendo $\dfrac{1}{3k+1} F_1$ y posteriormente $\boldsymbol{F_2} - kF_1$; $\boldsymbol{F_3} - 2kF_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 3k+1 & 3k+1 & 3k+1 \\ k & 1 & k \\ 2k & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-2k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$r(T) = 2 \Leftrightarrow k = 1\ \vee\ k = \frac{1}{2}\ \Rightarrow \eta(T) = 3 - r(T) = 3 - 2 = 1$$

$$r(T) = 3 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{3}\ \wedge\ k \neq 1\ \wedge\ k \neq \frac{1}{2}\ \Rightarrow \eta(T) = 3 - r(T) = 3 - 3 = 0$$

c) $r(T) < 3 \Leftrightarrow (k = -\frac{1}{3} \vee k = 1 \vee k = \frac{1}{2})$

d) $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, considerando $k = 1$ se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1-t \\ t \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}, \text{ parámetro}$$

Problema 41.

a) Demuestre que todas las raíces del polinomio característico de una matriz real simétrica son números reales.

b) Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces los vectores propios que corresponden a valores propios de A, distintos entre si, son ortogonales.

Demostraciones

a) Sea $t = a + bi$ una raíz del $P_A(t)$, por demostrar que $b = 0$.

$P_A(t) = 0 \Leftrightarrow |(a+bi)I_n - A| = 0$, con $A = A^t$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i, j$

Ahora el sistema homogeneo $[(a+bi)I_n - A](\alpha + \beta i) = 0 + 0i$; ($\alpha$,$\beta \in \mathbb{R}^n$ no nulos a la vez) tiene solución distinta de la trivial, de aquí se sigue

$aI_n\alpha - A\alpha - bI_n\beta + (aI_n\beta + bI_n\alpha - A\beta) = 0 + 0i$

$aI_n\alpha - A\alpha - bI_n\beta = 0 \quad \wedge \ aI_n\beta + bI_n\alpha - A\beta = 0$, de donde

$(\beta; aI_n\alpha - A\alpha - bI_n\beta) = 0 \Leftrightarrow a(\beta; I_n\alpha) - (\beta; A\alpha) - b(\beta; I_n\beta) = 0 \qquad (1)$

$(aI_n\beta + bI_n\alpha - A\beta, \alpha) = 0 \Leftrightarrow a(I_n\beta; \alpha) - (A\beta; \alpha) + b(I_n\alpha; \alpha) = 0 \qquad (2)$

pero como, $(I_n\beta; \alpha) = (I_n\beta)^t\alpha = \beta^t I_n^t \alpha = \beta^t I_n \alpha = (\beta; I_n\alpha)$

y también $(A\beta; \alpha) = (A\beta)^t\alpha = \beta^t A^t \alpha = \beta^t A\alpha = (\beta; A\alpha)$

remplazando en (1) y (2) y restando miembro a miembro resulta

$b(I_n\alpha; \alpha) + b(\beta; I_n\beta) = 0 \Leftrightarrow b\,(||\alpha||^2 + ||\beta||^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0.$

b) Sean α_1, α_2 dos vectores propios asociados a los valores propios t_1 y t_2 con $t_1 \neq t_2$, por tanto se debe tener: $A\alpha_1 = t_1\alpha_1 \ \wedge \ A\alpha_2 = t_2\alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \neq \theta$

Ahora, como

$t_1(\alpha_1;\alpha_2) = (t_1\alpha_1;\alpha_2) = (A\alpha_1;\alpha_2) = (A\alpha_1)^t\alpha_2 = \alpha_1^t A^t \alpha_2$, como $A = A^t$

$= \alpha_1^t A\alpha_2 = (\alpha_1; A\alpha_2) = (\alpha_1; t_2\alpha_2) = t_2(\alpha_1;\alpha_2)$, de donde

$(t_1 - t_2)(\alpha_1;\alpha_2) = 0$ pero $t_1 \neq t_2 \ \Rightarrow (\alpha_1;\alpha_2) = 0$ como $\alpha_1, \alpha_2 \neq \theta$ entonces α_1 y α_2 son ortogonales.

Problema 42.

a) Para que valores de k y p es posible encontrar una matriz A de orden 4, simétrica real, tal que sus valores propios sean: $2, -1, 1, 1$ con vectores propios: $(4,2,k,1), (1,-1,2,0), (1,p,1,1), (0,4,2,-6)$ respectivamente.

b) En caso que sea posible determinar k y p, encuentre la matriz A mediante una matriz P ortogonal que la diagonalice, en caso contrario haga caso omiso de esta parte.

Solución.

a) Por la parte b) del problema 3 deben ser ortogonales necesariamente los pares de vectores siguientes:

$((4,2,k,1);(1,-1,2,0)) = 0 \Leftrightarrow k = -1 \qquad (1)$

$((4,2,k,1);(1,p,1,1)) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2p + k + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -2$

$(((4,2,k,1);(0,4,2,-6)) = 0 \Leftrightarrow 8 + 2k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

$((1,-1,2,0);(1,p,1,1)) = 0 \Leftrightarrow 1 - p + 2 = 0 \Leftrightarrow p = 3 \ (\Rightarrow \ \Leftarrow)$

por tanto **no** es posible encontrar una matriz simétrica, pues los vectores propios asociados deben ser ortogonales.

b) Se omite.

Problema 43.

Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ una $T.L.$ y sea A su matriz representativa con respecto a las bases canónicas S_1 de $M_{2\times 2}$ (partida y llegada), dada por

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 & -1 \\ -23 & 15 & -7 & 2 \\ 13 & -9 & 5 & -1 \\ 9 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine $T^{-1}(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix})$

La inversa de la matriz representativa es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, por lo tanto para obtener lo pedido, calculamos $A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Entonces $T^{-1}(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

b) Determine $T^{-1}(\alpha)$ si $[\alpha]_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ donde

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\alpha = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

por tanto $A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 17 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$

c) Encuentre B matriz representativa de T con respecto a la base S_2.(partida y llegada).

De inmediato $B = P^{-1}AP$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, así

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -7 & -8 & -4 & -12 \\ 6 & 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Problema 44.

En $\mathbb{R}^4$, dado el subespacio $W = \langle\{(1,0,2,-2),(1,1,1,1),(3,1,5,-3)\}\rangle$

a) Determine una base ortonormal para W.

b) Determine una transformación lineal $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que el $Ker\,T = W$ y $Im\,T = W^{\perp}$.

Solución.

a) Una base para W es $\{(1,0,2,-2),(1,1,1,1)\}$ pués el vector $(3,1,5,-3)$ es C.L. de los otros dos vectores.

Por Gran Schmidt

$\beta_1 = (1,0,2,-2)$

$\beta_2 = (1,1,1,1) - \frac{1}{9}(1,0,2,-2) = \frac{1}{9}(8,9,7,11)$

Una base ortonormal resulta $\{\frac{1}{3}(1,0,2,-2), \frac{1}{\sqrt{315}}(8,9,7,11)\}$

b) Tomamos una base para $\mathbb{R}^4$ que incluya a los vectores $(1,0,2,-2)$ y $(1,1,1,1)$ por ejemplo

$$\{(1,0,2,-2),(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$$

por otra parte $W^{\perp} = \{(x,y,z,t)\,/\,x+2z-2t=0 \ \wedge\ x+y+z+t=0\}$ de donde resulta $W^{\perp} = \langle\{(-2,1,1,0),(2,-3,0,1)\}\rangle$

Así: $T(1,0,2,-2) = (0,0,0,0)$

$T(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$

$T(1,0,0,0) = (-2,1,1,0)$

$T(0,0,0,1) = (2,-3,0,1)$

luego $(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(z-y)\,\varepsilon_1 + y\,\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(2x-y-z)\varepsilon_3 + (t+z-2y)\varepsilon_4$

$T(x,y,z,t) =$

$\frac{1}{2}(z-y)T(\varepsilon_1) + y\,T(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}(2x-y-z)T(\varepsilon_3) + (t+z-2y)T(\varepsilon_4)$

$T(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(2x-y-z)(-2,1,1,0) + (t+z-2y)(2,-3,0,1)$

$$T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} -2x-3y+3z+2t \\ x-\frac{13}{2}y-\frac{7}{2}z-3t \\ x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z \\ t-z-2y \end{bmatrix}$$

Problema 45.

Sea $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ una base para $\mathbb{R}^n$ y sea dado un producto interno en $\mathbb{R}^n$, tal como $c_{ij}=(\alpha_i;\alpha_j)$ y sea $C=[\,c_{ij}\,]$, $i,j=1,2,\,\ldots.\,,n$ (note que C és simétrica)

Si α y $\beta\in\ \mathbb{R}^n$, entonces: $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i \qquad \wedge \qquad \beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i$ donde a_i y b_i

son determinados en forma única, así se define

$$(\alpha;\beta)=X^tCY;\quad X=[\alpha]_S \text{ e } Y=[\beta]_S$$

a) Es necesario imponer alguna condición para que $(\alpha;\beta)$ sea un producto interno bien definido.

b) Con atención a su respuesta en a) se puede afirmar que $(\alpha;\beta)$ es un producto interno si la base S es

$$S=\{(1,1,1),(1,0,2),(1,\,-1,1)\,\}$$

y calcule $(\alpha;\beta)$ y la $||\alpha||$ si $\alpha=(1,2,0)$ y $\beta=(2,3-1)$

Solución.

a) Las tres primeras propiedades de un producto interno se cumplen sin dificultad(debe verificarlo), para la cuarta propiedad $(\alpha;\alpha)=X^tCX$ es necesario que $X^tCX\geq 0$ y esto verifica solo si C es definida positiva.

b) Debemos obtener la matriz C y comprobar si es de finida positiva

Así, $$C=\begin{bmatrix}3&3&1\\3&5&3\\1&3&3\end{bmatrix}\Rightarrow C\sim\begin{bmatrix}3&3&1\\0&2&2\\0&2&\frac{8}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&3&1\\0&2&2\\0&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

todos los pivotes positivos, por tanto C es definida positiva luego $(\alpha;\beta)$ es un producto interno considerando la base S.

$$X=[\alpha]_S=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix};\ \ Y=[\beta]_S=\begin{bmatrix}4\\-3\\1\end{bmatrix}$$

$$(\alpha;\beta)=[\,2\quad -1\quad 0\,]\begin{bmatrix}3&3&1\\3&5&3\\1&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-3\\1\end{bmatrix}=8$$

$$||\alpha||=\sqrt{(\alpha;\alpha)}=\left([\,2\quad -1\quad 0\,]\begin{bmatrix}3&3&1\\3&5&3\\1&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

Problema 46.

Sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ una T. L. con valores propios reales, se sabe que

$$W = \{(x,y,z,t)\,/\; x - 2y + t = 0$$
$$2x - z + 3t = 0\,\}$$

es un subespacio propio de $t_1 = t_2$, también se sabe que $tr\,A = 8$, que la imagen del vector $(1,1,1,1)$ por A es $(3,3,3,3)$ y por último que $|A| = 21$.

a) Determine los valores y vectores propios de A.

b) ¿Es posible determinar A de modo que sea definida positiva? (justifique)

c) Sin determinar el $Ker\,T$, indique cuál es su dimensión. (justifique)

d) Calcule A^5.

Solución.

a) $tr\,A = 8 \Leftrightarrow 2\,t_1 + 3 + t_4 = 8 \qquad (1), \qquad$ pués $A(1,1,1,1) = 3\,(1,1,1,1)$

$|A| = 21 \Leftrightarrow \; t_1 t_2 t_3 t_4 = 1 \Leftrightarrow t_1^2 \cdot 3 \cdot t_4 = 21 \qquad (2)$

De (1) y (2) se obtiene $2\,t_1^3 - 5t_1^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow (t_1 + 1)(2t_1^2 - 7t_1 + 7) = 0$ de donde $t_1 = \,-1$ (las otras dos raíces son complejas) entonces $t_4 = 7$

Por tanto los valores propios son: $t_1 = t_2 = \,-1,\; t_3 = 3$ y $t_4 = 7$.

Vectores propios: De W se obtienen $\alpha_1 = (2,1,4,0)$ y $\alpha_2 = (0,1,6,2)$

vectores propios asociados a $t_1 = t_2 = \,-1,\; \alpha_3 = (1,1,1,1)$ asociado a $t_3 = 3$ para $t_4 = 7$ consideramos $\alpha_4 = (0,0,0,1)$

b) Es imposible pués tiene al valor propio $(\,-1)$ que es negativo.

c) Como $|A| = 21$ entonces $dim\,Ker\,T = 0$

d) Existen varias matrices A pués el vector propio α_4 puede ser cualquiera que sea $L.I.$ con los otros tres, para el caso en que $\alpha_4 = (0,0,0,1)$ se tiene que

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \tfrac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 12 & -2 & 0 \\ 8 & -16 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ 7 & -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

d) $A^5 = PD^5P^{-1}$

Problema 47.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & a+b \\ -2 & 4 & c & -2 & 6 \\ -2 & 4 & a+c-4 & -2 & a+b+3 \end{bmatrix}$$

y $W = \{X \in \mathbb{R}^5 \ / \ AX = 0\}$

a) Encuentre los valores de a, b y c de modo que la $dim\, W$ sea: $1, 2, 3\, o\, 4$.

b) Encuentre una base para $W^{\perp}$ para el caso de a, b y c tal que $dim\, W = 3$

Solución.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & a+b \\ -2 & 4 & c & -2 & 6 \\ -2 & 4 & a+c-4 & -2 & a+b+3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & a+b-3 \\ 0 & 0 & 3a+c-4 & 0 & a+b-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$dim\, W = 1$ es imposible

$dim\, W = 3 \Leftrightarrow a = 4,\ b = -1$ y $c = -8$ y para cualquier otro caso diferente de estos valores para $a,\ b$ y c en el que $dim\, W = 3$, entoces $dim\, W = 2$

Problema 48.

Sea $T : M_{2\times 2} \rightarrow M_{4\times 1}$ una $T.L.$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

con respecto a: $S_1 \rightarrow S_2$

$S_1=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$ y $S_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

a) Determine una base ortogonal para $Im\,T$.

b) Encuentre $\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ tal que $\left[T(\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix})\right]_{S_2}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\k\end{bmatrix}$.

Solución.

a) Note que $r(A)=4,$ la $Im\,T$ está generada por los vectores columna de A, entonces por Gram Schmidt

$\beta_1=(1,0,1,-1),\ \beta_2=(2,1,0,2),$

$\beta_3=(3,1,1,0)-\frac{4}{3}(1,0,1,-1)-\frac{7}{9}(2,1,0,2)=\frac{1}{9}(1,2,-3,-2)$

b) Primero determinamos el vector coordenado de α en la base S_1, es decir

$$\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+(z-t)\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+(y-z)\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+(x-y)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\left[T(\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix})\right]_{S_2}=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&2\\1&0&1&1\\-1&2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\z-t\\y-z\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\k\end{bmatrix},$$

Como el $r(A)=4\Rightarrow$ el sistema anterior es consistente para todo k real.

Problema 49.

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T(x,y,z)=(kx+3y,x-2y+z,kx+y-z)$$

a) Determine k de modo que $dim\,Ker\,T=1$

b) Considere $k=1$ y encuentre una base para la $Im\,T$, ¿es T invertible? en caso afirmativo determine una fórmula para T^{-1}.

c) Encuentre la matriz representativa de T con respecto a las bases $S_1\to S_2$,

donde

$S_1=\{(1,1,0),(1,-1,2),(0,1,2)\}$ y $S_2=\{(0,1,1),(2,1,0),(-1,1,3)\}$.

Considere $k=1$.

Solución.

a) $\forall\, \alpha \in KerT \Leftrightarrow \alpha = (x,y,z)\,/\quad \left[\begin{array}{ccc:c} k & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} k & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 4k+3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ luego}$$

$$dim\, KerT = 1 \Rightarrow\ 4k+3 = 0\ \Leftrightarrow\ k =\ -\frac{3}{4}$$

b) Como $k = 1 \neq\ -\frac{3}{4} \Rightarrow Im\,T = \mathbb{R}^3\ \wedge\ KerT = \{\theta\}\ \Rightarrow \exists\, T^{-1}$, como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T^{-1}(x,y,z) = \tfrac{1}{7}(x+3y+3z, 2x-y-z, 3x+2y-5z)$$

c) $T(1,1,0) \quad = (4,\,-1,2) =\ -8(0,1,1) + \dfrac{11}{3}(2,1,0) + \dfrac{10}{3}(-1,1,3)$

$$T(1,\,-1,2) = (-2,5,\,-2) = 14(0,1,1) - \frac{11}{3}(2,1,0) - \frac{16}{3}(-1,1,3)$$

$$T(0,1,2) \quad = (3,0,\,-1) =\ -2(0,1,1) + \frac{5}{3}(2,1,0) + \frac{1}{3}(-1,1,3)$$

luego

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 14 & -2 \\ \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Problema 50.

De la siguiente matriz A se sabe que 1 es uno de sus valores propios y que $(1,1,1,1)$ es su vector propio asociado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 2 & 2 & c \end{bmatrix}$$

a) Determine a, b y c.

b) Diga si A es o no diagonalizable (justifique), para los valores de a, b y c encontrados en a).

c) Si es posible calcule $A^{-100}(2,0,\,-2,4)$, para los valores de a, b y c

encontrados en a).

Solución.

a) Se debe tener que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 2 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = -2,\ b = -2 \text{ y } c = -3$$

b) Valores propios

$P_A(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 1$ y $t_3 = t_4 = -1$

Vectores propios

Para $t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = (1,0,0,0)$ y $\alpha_2 = (0,1,1,1)$

$t_3 = t_4 = -1 \Rightarrow \alpha_3 = (2,-1,1,0)$ y $\alpha_4 = (-1,1,0,1)$

Como existe una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ de vectores propios para $\mathbb{R}^4$, entonces A es diagonalizable.

c) Como $A^{-n} = P(D^{-1})^n P^{-1} \Leftrightarrow A^{-100} = P(D^{-1})^{100} P^{-1}$, con:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

notemos que en este caso $D = D^{-1}$, $\alpha = [2 \quad 0 \quad -2 \quad 4]^t$ luego

$A^{-100}(2,0,-2,4) = P(D^{-1})^{100} P^{-1} \alpha$

Problema 51.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, en caso que su respuesta sea verdadera demuéstrela, y en caso de ser falsa muestre un contra ejemplo.

a) Sea V, el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden n, sobre un cuerpo K, y sea W formado por todas las matrices que conmutan con una matriz dada, entonces W és un subespacio de V.

b) $\mathbb{R}^3/\mathbb{C}$, és un espacio vectorial.

c) En $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, todos los vectores ortogonales a un plano, que no pasa por el origen, forman un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

a) <u>Verdadera.</u> Sea $W = \{X \in V /\ XA = AX,\ A \text{ matriz fija.}\}$

$$\forall X_1, X_2 \in W \text{ y } k \in K \Rightarrow (X_1 + kX_2) \in W$$

En efecto $\forall X_1, X_2 \in W \;/\; X_1A = AX_1 \qquad (1)$

$$X_2A = AX_2 \Rightarrow kX_2A = kAX_2 \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2), se tiene:

$$X_1A + kX_2A = AX_1 + kAX_2 \Leftrightarrow (X_1 + kX_2)A = A(X_1 + kX_2)$$

entonces $(X_1 + kX_2) \in W$, lo que prueba que es un subespacio de V.

b) Falsa. No se cumple el axioma 1 de la ponderación, por ejemplo tomando

$i(x,y,z) = (ix, iy, iz) \notin \mathbb{R}^3$ pues ix, iy, iz no son componentes reales.

c) Verdadera. Sea $\vec{n}$ la normal del plano que no pasa por el origen entonces

$$W = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \vec{u} = t\vec{n},\, t \in \mathbb{R}\}$$

o también $\qquad W = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}\}$

En efecto: $\forall u_1, u_2 \in W \Rightarrow \vec{u}_1 = t_1\vec{n} \;\wedge\; \vec{u}_2 = t_2\vec{n},\; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; luego

$\forall k \in \mathbb{R},\, \vec{u}_1 + k\,\vec{u}_2 = t_1\vec{n} + k\,t_2\vec{n} = (t_1 + kt_2)\vec{n} = t\vec{n},\, t = (t_1 + kt_2) \in \mathbb{R}$

lo que nos demuestra que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Problema 52.

Sea $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot\cdot \alpha_n\}$, $A \subseteq V$, V espacio vectorial sobre K, A linealmente independiente, demuestre que si $\beta \in \langle A \rangle$, entonces β se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de A.

Solución.

Supongamos que hay dos formas distintas de expresar β, es decir sean:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \;\text{ y }\; \beta = \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i$$

restando miembro a miembro estas expresiones se tiene,

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\alpha_i$$

pero los α_i son L.I. entonces $x_i - y_i = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i,\; \forall i = 1, 2, \ldots n$

lo que prueba que β se escribe de manera única en C.L. de los vectores A.

Problema 53.

En $P_2/\mathbb{R}$ dados:

$p(x)=2+x,\ q(x)=1-x^2,\ r(x)=-1+x+x^2,\ s(x)=-x+x^2$

Sean $S_1=\langle\{p(x),q(x)\rangle$ y $S_2=\langle\{r(x),s(x)\}\rangle$, determine un vector $u(x)\in S_2$, tal que

$$P_2=\ S_1\oplus\langle\{u(x)\}\rangle$$

Solución.

Sea $u(x)=s(x)=\ -x+x^2,$ se debe verificar que

$\{2+x,1-x^2,\ -x+x^2\}$ es un conjunto L.I., pues de ser así, entonces

$$S_1\cap\langle\{u(x)\}\rangle=\{\theta\}\ \text{y}\ \ P_2=\ S_1\oplus\langle\{u(x)\}\rangle$$

Por tanto: $a_1(2+x)+a_2(1-x^2)+a_3(-x+x^2)=0$ conduce a

$$\begin{aligned} 2a_1+a_2&=0\\ a_1-a_3&=0\\ -a_2+a_3&=0 \end{aligned}$$

cuya solución es $a_1=a_2=a_3=0$, resultado que se pretendía.

Problema 54.

Demuestre que toda función que proyecta vectores de V, ortogonalmente, sobre un subespacio W del espacio vectorial V, es una transformación lineal.

Demostración.

Sea $T:V\rightarrow W$ tal que $T(x\,)=P_Wx;$ en que $P_W=A(A^tA)^{-1}A^t$ en que las columnas de A esta formada por una base de W

Así: 1) $T(x_1+x_2)=P_W(x_1+x_2)=P_Wx_1+P_Wx_2=T(x_1)+T(x_2)$

2) $T(kx)=P_W(kx)=kP_Wx=k\,T(x)$

luego T, es una transformación lineal.

Problema 55.

En $M_{4\times1}$, dado $W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$

a) Factorice $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\\1&-2\\1&1\end{bmatrix}$ en QR y ocupe Q y R para determinar $y=ax+b$ que mejor representa a los puntos: $(0,1),(-1,2),(-2,0)$ y $(1,4)$.

b) Encuentre un vector μ no nulo, tal que $P\mu=\mu$.

c) Determine el vector β en el espacio columna de A, más cercano al vector $[2 \quad 3 \quad -1 \quad 0]^t$.

Solución

a) De inmediato $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$;

como $A = QR \Leftrightarrow Q^t A = Q^t QR = I_2 R \Rightarrow R = Q^t A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

$y = ax + b,\ X = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix},\ X = (A^t A)^{-1} A^t Y$ donde $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$X = [(QR)^t (QR)]^{-1} (QR)^t Y = R^{-1} Q^t Y$

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 46 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

finalmente: $y = 1.1x + 2.3$

b) μ puede ser cualquiera de los vectores generadores de W.

c) $\beta = proy_W \alpha$, con $\alpha = [2 \quad 3 \quad -1 \quad 0]^t \Rightarrow$

$$\beta = A(R^{-1} Q^t \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Problema 56.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -9 & -9 \\ 6 & -8 & -7 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 9 \\ -9 & 11 & 16 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

¿Está b en el espacio imagen de T, en que $T(X) = AX$? Si así es, encuentre un X cuya imagen bajo T sea b.

Solución.

El sistema $AX = b$ debe ser compatible, y como:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -4 & -9 & -9 & 1 \\ 6 & -8 & -7 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 9 & 5 \\ -9 & 11 & 16 & 7 & -5 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-17}{2} & \frac{-37}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{2} & \frac{-29}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

esta matriz nos indica que el sistema en cuestión es compatible, por tanto b está en el espacio imagen de T. Hay infinitos X cuya imagen bajo T sea b, uno de ellos se obtiene para $x_4 = 0$ y resulta ser $X = \dfrac{1}{3}\left[\,1 \quad -2 \quad 1 \quad 0\,\right]^t$.

Problema 57.

Sean las bases de $\mathbb{R}^3$;

$S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$S_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$
$S_3 = \{(3,2,-1),(4,1,3),(1,1,-1)\}$

y dada la transformación representada en la base S_3 por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine las imágenes de los vectores básicos de la base S_2.

b) Determine la matriz de transformación en la base S_1.

c) Determine la matriz de la transformación inversa en la base S_2.

Solución.

a) Primero determinamos los vectores coordenada de los vectores de la base S_2 con respecto a la base S_3, resolviendo el sistema simultaneo:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 18 & 5 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 18 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -22 & -6 \\ 24 & 39 & 11 \\ -18 & -29 & -9 \end{bmatrix}$$

Las vectores columna de esta matriz, representan los vectores coordenada de las imágenes pedidas pero con respecto a la base S_3, por tanto tales imágenes resultan finalmente:

$T(1,1,1) = -13(3,2,-1) + 24(4,1,3) - 18(1,1,-1) = (39,-20,103)$

Analogamente, $T(0,1,1) = (61,-34,168)$ y $T(0,0,1) = (17,-10,48)$

b)

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & S_3 \longrightarrow S_3 & \\ P\downarrow & & \downarrow P \Rightarrow B = PAP^{-1} \\ & S_1 \longrightarrow S_1 & \\ & B & \end{array}$$

donde: $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -7 & 13 & 5 \end{bmatrix}$

luego resulta $B = \begin{bmatrix} -22 & 44 & 17 \\ 14 & -24 & -10 \\ -65 & 120 & 48 \end{bmatrix}$

c)

$$\begin{array}{ccc} & B^{-1} & \\ & S_1 \longrightarrow S_1 & \\ Q\uparrow & & \uparrow Q \Rightarrow C^{-1} = Q^{-1}B^{-1}Q \\ & S_2 \longrightarrow S_2 & \\ & C^{-1} & \end{array}$$

donde: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 48 & -72 & -32 \\ -22 & 49 & 18 \\ 120 & -220 & -88 \end{bmatrix}$, Así $C^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -56 & -104 & -32 \\ 101 & 171 & 50 \\ -233 & -375 & -106 \end{bmatrix}$

Problema 58.

Sea β es un vector propio de A con valor propio correspondiente t y sea k un escalar, demuestre que β es un vector propio de $A-kI_n$ con valor propio correspondiente $t-k$.

Demostración.

Por hipótesis $A(\beta)=t\beta$, de aquí se tiene

$$A(\beta)-k\beta=t\beta-k\beta \Leftrightarrow (A-kI_n)\beta=(t-k)\beta \Rightarrow$$

β es un vector propio de $A-kI_n$ con valor propio $t-k$.

Problema 59.

Sean

$$A=\begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } v=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Averigue a cuál de los subespacios: $Ker\,A$, $Im\,A$ o a ninguno pertenecen los vectores u y v.

b) Encuentre la $proy_W u$, si $W=Im\,A^t$, explique geométricamente su resultado.

Solución.

a) De inmediato se tiene

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u \in Ker\,A$$

Para ver si $u \in Im\,A$, se resuelve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow u \in Im\,A$$

Analogamente se determina que: $v \notin Ker\,A$ y que $v \notin Im\,A$

b) Como $r(A)=2 \Rightarrow W=Im\,A^t=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$

Así: $proy_W u=A_1x$; donde $x=(A_1^tA_1)^{-1}A_1^tu$, con $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

efectuando cálculos se obtiene: $x = \; = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow proy_W u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Este resultado nos indica que el vector director del plano que representa W es el vector $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Problema 60.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una transformación lineal definida por

$$T(1,1,1) = (1,2,-1)$$
$$T(0,1,1) = (2,-3,0)$$
$$T(0,0,1) = (1,-5,1)$$

a) Determine la matriz representativa de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Resuelva para x, y y z la ecuación :

$$2\,T(x-1, y, z+1) - 3\,T(y,z,x) = (T \circ T)(2,2,2)$$

Solución.

a) $T(1,0,0) = (1,2,-1) - (2,-3,0) = (-1,5,-1)$

$T(0,1,0) = (2,-3,0) - (1,-5,1) = (1,2,-1)$

$T(0,0,1) = (1,-5,1)$

De donde se obtiene la matriz representativa pedida, que es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $2\,T(x-1, y, z+1) - 3\,T(y,z,x) = (T \circ T)(2,2,2) \Leftrightarrow$

$$T(2x-3y-2, 2y-3z, -3x+2z+2) = T(2,4,-2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x-3y-2 \\ 2y-3z \\ -3x+2z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

lo que conduce al sistema:

$$\begin{aligned} 5x - 5y + z &= 4 \\ 25x - 11y - 16z &= 48 \\ 5x - y - 5z &= 12 \end{aligned}$$

Resolviendo resultta: $x = \frac{14}{5} + \frac{13}{10}z$; $y = 2 + \frac{3}{2}z$, z parámetro.

Problema 61.

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

a) Determine los valores y vectores propios de A.

b) Resuelva $T^{20}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T^{-21}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T^{-11}(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix})$

c) Si A es la matriz representativa de una T. L. de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a $S_1 = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\}$. Determine fórmulas para $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$ y para $T^{-1}(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})$.

Solución.

a) Valores propios:

$$P_A(t) = |tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & 3 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = 2$$

Vectores propios:

$$t_1 = 1 \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Note que existe $T^{-1} \Rightarrow T^{40}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T^{9}(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}) \Leftrightarrow$

$$A^{40}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A^{9}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow PD^{40}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1} + PD^{9}P^{-1}$$

donde; $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Problema 62.

a) Sea $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot\cdot, \alpha_n\}$ una base ortonormal para un espacio vectorial V, $\forall \alpha \in V$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{i.}$ Demuestre que $\|\alpha\|^2$ es igual a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

b) Encuentre un vector ortogonal a todos los vectores del plano generado por: $\vec{a} = (1, 2, 2)$ y $\vec{b} = (1, 1, 1)$ y muestre que dicho vector tiene la dirección del vector $proy_{W^\perp}\alpha$ donde $\alpha = (2,0,3)$.

Solución.

a) $\|\alpha\|^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i ; \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i)$

$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i ; x_1\alpha_1) + (\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i ; x_2\alpha_2) + \cdot\cdot\cdot + (\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i ; x_n\alpha_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_1 x_i(\alpha_i;\alpha_1) + \sum_{i=1}^{n} x_2 x_i(\alpha_i;\alpha_2) + \cdot\cdot\cdot + \sum_{i=1}^{n} x_n x_i(\alpha_i;\alpha_n)$$

Note:

Que, en la primera sumatoria todos los productos son 0 excepto cuando $i = 1$ lo mismo en la segunda cuando $i = 2$, y así sucesivamente hasta la última para $i = n$, es decir:

$$= x_1^2(\alpha_1;\alpha_1) + x_2^2(\alpha_2;\alpha_2) + \cdot\cdot\cdot + x_n^2(\alpha_n;\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

b) De inmediato el vector en cuestión es $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = (0,1,-1)$

$$W = \langle\{(1,2,2),(1,1,1)\}\rangle \Rightarrow W^\perp = \{x,y,z) \,/\, x+2y+2z = 0 \quad x+y+z = 0 \;]\}$$

o bien $W^\perp = \langle\{(0,1,-1)\}\rangle \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces

$proy_{W^\perp}\alpha = Ax = x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, como se pretendía.

Problema 63.

Dada la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Determine la distancia desde el vector $\alpha = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 1]^t$ al subespacio $W = ImM.$

b) Determine la matriz de proyección sobre el subespacio $W^\perp$.

Solución.

a) La distancia pedida es $d = ||\alpha - proy_W\alpha||$

Como $r(M) = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $proy_W \alpha = Ax$, $x = (A^t A)^{-1} A^t \alpha$

Haciendo los cálculos pertinentes resulta $proy_W \alpha = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}$

Así: $d = || \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 23 \\ -9 \\ 23 \\ -7 \end{bmatrix} || = \frac{6\sqrt{33}}{11}$

b) $P_{W^\perp} = I_4 - P_W = I_4 - \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 9 & -1 & -4 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema 64.

1. Sea $T : P_2 \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = p(2x - 1)$$

a) Determine la matriz de T con respecto a $\{1, x, x^2\}$

b) Ocupe cambio de base para determinar la matriz de T, con respecto a

$$\{1 + x, 1 - x, x^2\}$$

Indicación: Note que, por ejemplo $T(4x - 1) \Rightarrow p(x) = 4x - 1$, entonces $T(4x - 1) = 4(2x - 1) - 1$

Solución.

a)
$$\begin{aligned} T(1) &= 1 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= 2x - 1 &&= (-1) \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= 1 - 4x + 4x^2 &&= 1 \cdot 1 + (-4) \cdot x + 4 \cdot x^2 \end{aligned}$$

de donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Sean: $S_1 = \{1, x, x^2\}$ y $S_2 = \{1+x, 1-x, x^2\}$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ P\uparrow & & \uparrow P \Rightarrow B = P^{-1}AP, \\ S_2 & \longrightarrow & S_2 \end{array}$$

donde $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, luego

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Problema 65.

Sea la función $F : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, tal que

$$F(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = (1,0,0,1); \quad F(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = (1,2,3,4);$$

$$F(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (4,3,2,5) \text{ y } F(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (0,1,1,1)$$

a) Determine F y demuestre que define un isomorfismo de $M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$

b) Determine el vector de $M_{2\times 2}$ que tiene por imagen al vector $(1, 0, -4, 3)$

Solución.

a)

$$F(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (0,1,1,1); \quad F(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (4,2,1,4);$$

$$F(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = (-3, -1, 1, -1) \text{ y } F(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (0, -2, -3, -3)$$

Sea A, matriz de F con respecto a las bases canónicas de $M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, así

$$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & -3 & 0\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 4 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Como $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow F$ es epiyectiva, y por el teorema de la dimensión

$$dim\, M_{2\times 2} = dim\, Im\, F + dim\, Ker\, F \Leftrightarrow 4 = 4 + dim\, Ker\, F$$

$\Rightarrow dim\, Ker\, F = 0,$ entonces F es inyectiva, por tanto F es una biyección.

Ahora la función F se puede expresar por $F(X) = AX,$ donde X es el vector coordenada de $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ con respecto a la base canónica de $M_{2\times 2}$, y es claro que

$$F(X+kY) = A(X+kY) = AX + A(kY) = AX + kAY = F(X) + kF(Y)$$

lo que prueba que F es una transformación lineal, luego F define un isomorfismo de $M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$

b) Como F es un isomorfismo entonces existe $F^{-1},$ luego

$$F^{-1}(1,0-4,3) = A^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -4\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & 3 & -10 & 8\\ -2 & 0 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -4 & 4\\ -4 & 1 & -6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -4\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}57\\ 19\\ 25\\ 35\end{bmatrix}$$

entonces

$$F^{-1}(1,0-4,3) = \begin{bmatrix}57 & 19\\ 25 & 35\end{bmatrix}$$

Problema 66.

Sea A una matriz de 3×3 con vectores propios

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

correspondientes a los valores propios

$$t_1 = -\tfrac{1}{3},\ t_2 = \tfrac{1}{3}\ \text{ y }\ t_3 = 1\ \text{ respectivamente, y }\ x = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

a) Encuentre $A^{20}(x)$

b) Determine $A^n(x)$. ¿Qué pasa cuando n crece(es decir, $n \to \infty$)?

Solución.

a) $A^{20} = PD^{20}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3^{20}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} (\frac{-1}{3})^n & \frac{1}{3^n} - (\frac{-1}{3})^n & 1 - \frac{1}{3^n} \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 1 - \frac{1}{3^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n(x) = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} (-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{3^n} + 2 \\ 2 - \frac{1}{3^n} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema 68.

Sea $W = \{(x,y,z,t)/\ x + 2z - t = 0 \ \wedge \ -x + y - 3z + 2t = 0 \ \wedge$

$2x + y + 3z + kt = 0\}$

el subespacio asociado a un valor propio de multiplicidad 2 ($t_1 = t_2$) y sean $t_3 = 2$ y $t_4 = -1$ dos valores propios de A cuyos vectores propios asociados son respectivamente

$u_3 = (1,1,1,1)$ y $u_4 = (1,0,1,2)$ y $tr\,A = 8$

a) Determine k.

b) Averigue si existe la matriz A y en caso afirmativo encuéntrela. ¿És A diag.?

Solución.

a) W debe ser de dimensión 2, luego

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & k & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k+2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow k+1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

b) Valores propios:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 8 \Leftrightarrow 2t_1 + 2 - 1 = 8 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = \tfrac{7}{2}$$

Vectores ptopios asociados a: $t_1 = t_2 = \frac{7}{2}$ son

$$u_1 = (-2,1,1,0) \text{ y } u_2 = (1,-1,0,1)$$

Así: $A = PDP^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -15 & 27 & -21 \\ -3 & 10 & -9 & 6 \\ 6 & -15 & 34 & -21 \\ 15 & -33 & 63 & -41 \end{bmatrix},$$ es diagonalizable pues existe una

base de vectores propios para $\mathbb{R}^4$.

Problema 69.

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 4 & -6 & p \end{bmatrix}$$

a) Determine la preimagen del vector $[6 \quad 2 \quad -8 \quad 12]^t$, para $k = 1$ y $p = -10$

b) Determine los valores de k y p de modo que $\dim Im\, A = 2$

c) Encuentre los valores adecuados de: a, b, k y p de modo que el vector $[a \quad b \quad 1]^t$ pertenezca al $ker\, A$.

Solución.

a) Se debe resolver el sistema

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & -5 & 6 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 4 & -6 & -10 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 4 & -6 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & p+10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & p+10 \end{bmatrix}; \text{ luego } r(A)=2 \Rightarrow k=1 \text{ y } p=-10$$

c) Se debe tener que:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 4 & -6 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-5=0 \\ -2a+2b+4=0 \\ kb+1=0 \\ 4a-6b+p=0 \end{cases}$$

de donde se obtienen: $a=1,\ b=-1,\ k=1$ y $p=-10$

Problema 70.

a) Demuestre que toda matriz simétrica e idempotente es una matriz de proyección sobre un subespacio W de $\mathbb{R}^n$.

b) Determine el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ y además descríbalo geométricamente tal que la matriz

$$P_W = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

es su matriz de proyección.

Solución.

a) Sea B una matriz simétrica e idempotente de $n \times n$, es decir:

$$B^t = B \text{ y } B^2 = B$$

Se debe demostrar dos cosas:

1) Para cualquier $X \in \mathbb{R}^n$, sea $Y = BX$ y $Z = X - Y$, entonces

$$Y \text{ es ortogonal a } Z$$

2) Sea $W = ImB$, (espacio columna de B) entonces X es la suma de un vector de W y un vector de $W^{\perp}$.

En efecto:

1) $(Y;Z)=(BX;X-Y)=(BX;X-BX)=(BX)^t(X-BX)$
$$=X^tB^t(X-BX)=X^t(B^tX-B^tBX)=X^t(BX-B^2X)$$
$$=X^t(BX-BX)=0$$

2) $X=Y+Z,\ Y\in W\ \wedge\ Z\in W^{\perp}$(Descomposición unica)

Sea $\{u_1,u_2,\cdot\cdot\cdot,u_p\}$ una base ortonormal para W,

Así $\forall X\in\mathbb{R}^n,\ X=x_1u_1+x_2u_2+\cdot\cdot+x_pu_p+x_{p+1}u_{p+1}+\cdot\cdot+x_nu_n$

es inmediato que $x_i=(X;u_i),\ 1\le i\le p,$ así $Y=\sum_{i=1}^{n}(X;u_i)u_i\in W$, a este vector se suele llamar $proy_W X$.

Por otra parte $Z=X-Y\Rightarrow$

$(Z;u_1)=(X;u_1)-(X;u_1)(u_1;u_1)-(X;u_2)\cdot 0-(X;u_3)\cdot 0-\cdot\cdot\cdot-0=0$

Entonces Z es ortogonal a u_1. De manera semejante, Z es ortogonal a cada u_i de la base para W. Por tanto Z es ortogonal a todo vector de W, es decir, Z está en $W^{\perp}$.

b) De inmediato se sabe que

$$W=\langle\{(1,\,-1,\,-2)\}\rangle \text{ (Vect. col. de } P_W)$$

Que representa a una recta en $\mathbb{R}^3$.

Problema 71.

Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores:

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

para determinar el máximo de la función $f(x,y,z)=2x+3y+4z$ sujeta a la restricción $x^2+y^2+z^2=1$. ¿Cuál es el punto donde se produce este máximo?

Solución.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz dice: $(\vec{u};\vec{v})\le|((\vec{u};\vec{v})|\le||\vec{u}||\,||\vec{v}||$, luego

$2x+3y+4z\le\sqrt{2^2+3^2+4^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{29}\Rightarrow$

el máximo de $f(x,y,z)$ es $\sqrt{29}$

Ahora, como $(\vec{u};\vec{v})=||\vec{u}||\,||\vec{v}||cost=||\vec{u}||\,cost$ y $(\vec{u};\vec{v})$ es máx. cuando $cost=1\Rightarrow\vec{u}$ es paralelo a $\vec{v}$ entonces es válido suponer que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k\vec{u} = k\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 3k \\ z = 4k \end{cases}$$

Con lo que: $(2k)^2 + (3k)^2 + (4k)^2 = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$

Así: $x = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$ y $z = \dfrac{4}{\sqrt{29}}$

Problema 72.

a) Utilice la factorización QR para encontrar una solución por mínimos cuadrados de $AX = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) Se dice que A y B matrices de $n \times n$ son semejantes, si $B = P^{-1}AP$ para alguna matriz P, invertible.

Demuestre que dos matrices semejantes tienen: el mismo determinante, rango y traza.

Solución.

a) $AX = b \Leftrightarrow A^tAX = A^tb \Leftrightarrow X = (A^tA)^{-1}A^tb$ pero $A = QR \Rightarrow$
$X = [(QR)^tQR]^{-1}(QR)^tb = (R^tQ^tQR)^{-1}R^tQ^tb = R^{-1}Q^tb$

Por Gram-Schmidt se obtienen

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \ \beta_2 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{5}/10 \\ 3\sqrt{5}/10 \\ \sqrt{5}/10 \\ \sqrt{5}/10 \end{bmatrix}, \ \beta_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ 0 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

Así:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 3\sqrt{5}/10 & -\sqrt{6}/6 \\ -1/2 & 3\sqrt{5}/10 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/6 \\ 1/2 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} \text{ y } R = Q^tA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{5} & 3\sqrt{5}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix}$$

$$X = R^{-1}Q^t\, b = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & -\sqrt{6}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} Q^t\, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

b)

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A|.$$

$r(B) = r(P^{-1}AP)$ pero $r(MN) = r(NM)$, entonces

$$= r(APP^{-1}) = r(A).$$

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A).$$

Problema 73.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que

$T(\alpha_1) = \beta_1$
$T(\alpha_2) = \beta_2 - \beta_1$
$T(\alpha_3) = \beta_3 - \beta_2$
$T(\alpha_4) = \beta_3$

donde:

$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es una base para V.

$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ y $S_3 = \{\beta_1 + \beta_2, \beta_2 + \beta_3, \beta_3 + \beta_1\}$ son bases de W.

a) Demuestre que $Ker\, T \neq \{\theta\}$

b) Encuentre la matriz de T, con respecto a : $S_1 \to S_2$ y ocupando cambio de base con respecto a $S_1 \to S_3$.

c) Encuentre $T(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ ocupando la matriz de T, con respecto a $S_1 \to S_3$.

Solución.

a) Notemos que $T(\alpha_1) + T(\alpha_2) + T(\alpha_3) - T(\alpha_4) = \theta$

$$\Updownarrow$$

$$T(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = \theta$$

entonces $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \in Ker\, T \Rightarrow Ker\, T \neq \{\theta\}$

b)
$$\begin{aligned} T(\alpha_1) = \beta_1 \quad &= \quad 1 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3 \\ T(\alpha_2) = \beta_2 - \beta_1 \;&=\; -1 \cdot \beta_1 + 1 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_3) = \beta_3 - \beta_2 \; &= \quad 0 \cdot \beta_1 - 1 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3 \\
T(\alpha_4) = \beta_3 \qquad\quad &= \quad 0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 1 \cdot \beta_3
\end{aligned}
$$

así la matriz de T con respecto a S_1 a S_2 es

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

ahora por cambio de base

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, "A"] & S_2 \\
S_1 \arrow[u, "I"] \arrow[r, "B"'] & S_3 \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
\Rightarrow B = P^{-1}A,
$$

$$
B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

c) $[T(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)]_{S_3} = B\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$
T(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) + \frac{1}{2}(\beta_3 + \beta_1) = \beta_3
$$

Problema 74.

Sea W el plano en $\mathbb{R}^3$ con ecuación $x - y + 2z = 0$.

a) Encuentre la matriz representativa de la transformación que proyecta ortogonalmente vectores de $\mathbb{R}^3$, sobre el plano W.

b) Determine la matriz representativa de otra transformación, que transforme los vectores del plano W en los vectores de un plano cuya normal sea el vector $(1, 1, 1)$.

Problema 75.

Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dos transformaciones lineales definidas por:

T_1 transforma todo vector de $\mathbb{R}^2$ en una reflexión con respecto a la recta $y = -x$ y T_2 definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

con respecto a $S_1 \to S_2$, donde $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ y S_2 canónicas de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine una fórmula par $T_2 \circ T_1$.

b) Encuentre la matriz representativa de T_1^{-1}, e indique su efecto geométrico en plano de $\mathbb{R}^2$.

Problema 76.

Sea A una matriz ortogonal de $n \times n$ y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación definida por $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demuestre que:

i) $||\, T(x) \,|| = ||x||$

ii) $(T(x); T(y)) = (x; y)$

Demostración.

i) $||\, T(x) \,|| = ||Ax|| = \sqrt{(Ax; Ax)} = \sqrt{(Ax)^t Ax} = \sqrt{x^t(A^tA)x}$

$$= \sqrt{x^t(I_n)x} = \sqrt{x^tx} = \sqrt{(x;x)} = ||x||$$

ii) $(T(x); T(y)) = (Ax; Ay) = (Ax)^t Ay = x^t(A^tA)y = x^ty = (x; y)$

Problema 77.

a) Si u y v son vectores propios de A, asociados con el valor propio t, entonces para cualquier vector no nulo w en $\langle\{u, v\}\rangle$, $Aw = tw$.

b) Sea A una matriz diagonalizable, entonces demuestre que la matriz diagonalizada D también satisface el polinomio característico de A.

Solución.

a) Dado que: $Au = tu$ y $Av = tv$, $u, v \neq \theta, w \in \langle\{u, v\}\rangle \Leftrightarrow w = ku + pv$;

Así: $Aw = A(ku + pv) = kAu + pAv = ktu + ptv = t(ku + pv) = tw$

b) A diagonalizable $\Leftrightarrow \exists P$ no singular tal que $A = PDP^{-1}$, entonces

$P_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$ por Cayley Hamilton

$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0$, de aquí

$$(PDP^{-1})^n + a_{n-1}(PDP^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1(PDP^{-1}) + a_0PP^{-1} = 0$$
$$P(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I_n)P^{-1} = 0 \Rightarrow$$
$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I_n = 0 \Rightarrow D \text{ satisface a } P_A(t).$$

Problema 78.

a) Mediante la factorización QR de A, determine una solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) Mediante Cholesky muestre que $f(x, y, z) > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = 9x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 12xy - 6xz - 2yz$$

Solución.

a) $x = R^{-1}Q^tb = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -23 \\ -28 \\ 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.533 \\ -1.866 \\ 4.266 \end{bmatrix}$

donde

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{19}\sqrt{19} & -\frac{6}{2641}\sqrt{7923} & -\frac{19}{2085}\sqrt{2085} \\ 0 & \frac{1}{417}\sqrt{7923} & -\frac{34}{2085}\sqrt{2085} \\ 0 & 0 & \frac{1}{30}\sqrt{2085} \end{bmatrix}$$

$$Q^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{19}\sqrt{19} & \frac{1}{19}\sqrt{19} & \frac{2}{19}\sqrt{19} & \frac{2}{19}\sqrt{19} & \frac{3}{19}\sqrt{19} \\ \frac{20}{7923}\sqrt{7923} & \frac{13}{2641}\sqrt{7923} & \frac{59}{7923}\sqrt{7923} & \frac{-12}{2641}\sqrt{7923} & \frac{-35}{7923}\sqrt{7923} \\ \frac{-7}{834}\sqrt{2085} & \frac{6}{695}\sqrt{2085} & \frac{1}{4170}\sqrt{2085} & \frac{21}{1390}\sqrt{2085} & \frac{-43}{4170}\sqrt{2085} \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$f(x,y,z) = X^t A X = X^t L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = [(L\sqrt{D})^t X]^t[(L\sqrt{D})^t X]$$
$$= [\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}]^t \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3x+2y-z & y+z & 2z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3x+2y-z \\ y+z \\ 2z \end{bmatrix}$$
$$= (3x+2y-z)^2 + (y+z)^2 + 4z^2 > 0$$

Problema 79.

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine su descomposición espectral

b) Muestre que las matrices de la descomposición espectral de A, corresponden a las matrices de proyección ortogonal de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, sobre los los subespacios $W_{t_2=t_3}$ y $W_{t_1}^{\perp}$.

Solución.

a) Valores propios: $t_1 = 4,\ t_2 = t_3 = 1$

Vectores propios asociados:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

base ortonormal

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = t_1 q_1 q_1^t + t_2 q_2 q_2^t + t_3 q_3 q_3^t$$
$$= 4\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a determinar la matriz de proyección de $W_{t_1}^{\perp}$

$$P_{W^\perp} = QQ^t = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

entonces $P_W = I_3 - P_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

Problema 80.

a) Determine un conjunto de vectores que genere el espacio nulo de

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\2 & 3 & 6 & -2\\2 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

b) Suponga que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Demuestre que $\vec{u}$ es ortogonal a cualquier vector de la forma $r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$, donde r y s son escalares

Solución.

a) Note que $A \sim I_n \Rightarrow Ker\,A = \{(0,0,0,0)\}$

b) Si $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $\vec{w} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ y $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$ y como

$\vec{u}\cdot(\,r\,\vec{v} + s\,\vec{w}) = r(\vec{u}\cdot v) + s(\vec{u}\cdot\vec{w}) = 0 + 0 = 0$ entonces $\vec{u}$ es ortogonal a $r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$.

Problema 81.

Suponga que $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si A es una matriz no singular de $n \times n$, entonces $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración.

Sea $\quad x_1Av_1 + x_2Av_2 + \ldots + x_nAv_n = \theta \Leftrightarrow$

$Ax_1v_1 + Ax_2v_2 + \ldots + Ax_nv_n = \theta \Leftrightarrow$

$A\,(x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n) = \theta, \quad A$ es no singular, $\exists A^{-1} \Rightarrow$

$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = \theta$ y como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es LI. entonces

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$ por tanto $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ es LI.

Problema 82.

Sean $S = \{v_1, v_2\}$ y $T = \{w_1, w_2\}$ bases para P_1, donde

$$w_1 = t - 1, \qquad w_2 = t + 1$$

Si la matriz de cambio de base de T a S es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

determine los vectores de S.

Solución.

Sea $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, matriz de cambio de base de T a S, entonces

$$w_1 = 1\,v_1 + 2\,v_2$$
$$w_2 = 2\,v_1 + 3v_2$$

de donde se obtienen:

$$v_1 = -3w_1 + 2w_2 = -3(t-1) + 2(t+1) = -t + 5$$

$$v_2 = 2w_1 - w_2 = 2(t-1) - (t+1) = t - 3$$

Así los vectores de S son: $v_1 = -t + 5$ y $v_2 = t - 3$.

Problema 83.

Responda con falso o verdadero cada una de las proposiciones siguientes, en caso de ser verdadero demuestre y en caso de ser falso justifique.

a) En $\mathbb{R}^n$, $\| cv \| = c \| v \|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$

b) El espacio solución del sistema homogeneo $A\boldsymbol{x} = 0$ es generado por las columnas de A.

c) Todo conjunto ortonormal de cinco vectores en $\mathbb{R}^5$ es una base para $\mathbb{R}^5$.

d) Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces $r(A) = n$.

Solución.

a) **Falso.**

$$\| cv \| = \sqrt{(cv; cv)} = \sqrt{c^2(v; v)} = |c|\sqrt{(v; v)} = |c| \, \| v \|.$$

b) **Falso.**

Si A es 2×3 el espacio columna esta generado por vectores de 2×1, en tanto que la solución de $A\boldsymbol{x}=0$ genera vectores de 3×1.

c) **Verdadero.**

Pués, $dim\,\mathbb{R}^5=5$ son cinco vectores y todo conjunto ortogonal es LI., por tanto forman una base para $\mathbb{R}^5$.

d) **Falso.**

Como un contraejemplo basta tomar la matriz simétrica $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ y ésta es de rango 1 y no 2.

Problema 84.

De las afirmaciones que se indican, determine cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. Para las que sean verdaderas debe hacer una demostración y para las falsas bastará un contraejemplo o una justificación adecuada.

a) Si

$$A=\begin{bmatrix}a-3 & 2 & 1\\ -1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

entonces el único valor de a para el cual el sistema lineal $Ax=0$ tiene una solución no trivial es $a=2$.

b) Si un sistema lineal $Ax=b$, admite por soluciones a x_1 y a x_2, entonces admite infinitas soluciones.

c) Una matriz simétrica A, siempre es diagonalizable.

d) Si $W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$, entonces $W^{\perp}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$, donde t es cualquier número real.

Solución.

a) **Falso.**

$$\begin{vmatrix}a-3 & 2 & 1\\ -1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a(a-3)+2=0\Leftrightarrow a=2\ \vee\ a=1, \text{ por tanto}$$

$a=2$ no es el único valor.

b) **Verdadera.**

Si x_1 y x_2 son soluciones de $Ax=b \Rightarrow Ax_1=b$ y $Ax_2=b$

por tanto también es solución $x_1+p(x_2-x_1)$ pues

$$A[x_1+p(x_2-x_1)]=Ax_1+p(Ax_2-Ax_1)=b+p(b-b)=b$$

Como p es un real arbitrario, entonces el sistema admite infinitas soluciones.

c) **Falso.**

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que es simétrica no es diagonalizable, pues el valor propio

$t=1$ es de multiplicidad algebraica 2 y su multiplicidad geométrica es 1.

d) **Falsa.**

Pues el vector $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ también pertenece a $W^{\perp}$ y no es precísamente de la forma

$\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Problema 85.

Determine una base ortonormal para el espacio solución del sistema homogeneo

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+2x_4&=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

y encuentre el vector más cercano al vector $(1,2,0,-1)$, en el complemento ortogonal de este espacio solución.

Solución.

Sea W el espacio solución del sistema

$\forall u \in W,\ u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1=x_3+x_4$ y $x_2=-3x_4$

luego, $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_3+x_4\ ,-3x_4,x_3,x_4)$

$$=x_3(1,0,1,0)+x_4(1,-3,0,1)$$

$W = \langle \{(1,0,1,0),(1,\,-3,0,1)\} \rangle$

$\beta_1 = (1,0,1,0)$

$\beta_2 = (1,\,-3,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) = \frac{1}{2}(1,\,-6,\,-1,2)$

Así, $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{42}}(1,\,-6,\,-1,2)\}$ es una base ortonormal para W

El vector más cercano es $proy_{W^{\perp}} v = v - proy_W v$, $v = (1,2,0\,,\,-1)$

$proy_W v = \frac{1}{2}(1,0,1,0) - \frac{13}{42}(1,\,-6,\,-1,2) = \frac{1}{42}(8,78,34,\,-26)$, así

$proy_{W^{\perp}} v = (1,2,0\,,\,-1) - \frac{1}{21}(4,39,17,\,-13) = \frac{1}{21}(17,3,\,-17,\,-8)$

Problema 86.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, una transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Sea S_1 la base canónica para $\mathbb{R}^4$ y sea $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ otra base para $\mathbb{R}^4$.

a) Indique (justificando), cuál de los siguientes vectores

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

pertenece al $Ker\,T$ o a la $Im\,T$.¿Es T invertible?(justifique)

b) Calcule la matriz B, representativa de T con respecto a S_2 ocupando el teorema de cambio de base.

Solución.

a)

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix} \in Im\,T, \text{ pues } 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix} \notin Ker\,T, \text{ porque } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \in Ker\,T, \text{ pues } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = P^{-1}AP, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 87.

a) Indique si es posible que los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

formen una base de vectores propios asociados a los valores propios : $4, 1, -2$ tal que A es diagonalizable y simétrica. No calcule A.

b) Demuestre que una matriz de proyección ortogonal sobre un subespacio W, solo admite por valores propios a: 0 y 1.

Solución.

a) Como los valores propios son reales distintos y sus vectores propios son ortogonales, entoces existe una matriz A simétrica y diagonalizable.

b) Sea A una matriz de proyección ortogonal sobre un subespacio W, se sabe que A es idempotente $(A^2 = A)$.

Si t es un valor propio de A y u su vector propio asociado, entonces

$$Au = tu, \text{ con } u \neq \theta \text{ de aquí } A^2u = t\,Au \Leftrightarrow Au = tAu \Leftrightarrow$$

$$tu = t^2u \Leftrightarrow (t - t^2)u = \theta, \text{ como } u \neq \theta \Rightarrow t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = 1$$

Problema 88.

1. Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 4 & -6 & p \end{bmatrix}$$

a) Determine la preimagen del vector $[6 \quad 2 \quad -8 \quad 12]^t$, para $k=1$ y $p=-10$

b) Determine los valores de k y p de modo que $\dim Im\, A=2$

c) Encuentre los valores adecuados de: a, b, k y p de modo que el vector $[a \quad b \quad 1]^t$ pertenezca al $ker\, A$.

Solución.

a) Se debe resolver el sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & -5 & 6 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 4 & -6 & -10 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow X=\begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 4 & -6 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & p+10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & p+10 \end{bmatrix};\ \text{luego } r(A)=2 \Rightarrow k=1 \text{ y } p=-10$$

c) Se debe tener que:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 4 & -6 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-5=0 \\ -2a+2b+4=0 \\ kb+1=0 \\ 4a-6b+p=0 \end{cases}$$

de donde se obtienen: $a=1,\ b=-1,\ k=1$ y $p=-10$

Problema 89.

a) Demuestre que toda matriz simétrica e idempotente es una matriz de proyección sobre un subespacio W de $\mathbb{R}^n$.

b) Determine el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ y además descríbalo geométricamente tal que la matriz

$$P_W = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

es su matriz de proyección.

Solución.

a) Sea B una matriz simétrica e idempotente de $n \times n$, es decir:

$$B^t = B \text{ y } B^2 = B$$

Se debe demostrar dos cosas:

1) Para cualquier $X \in \mathbb{R}^n$, sea $Y = BX$ y Z $= X - Y$, entonces

$$Y \text{ es ortogonal a } Z$$

2) Sea $W = ImB$, (espacio columna de B) entonces X es la suma de un vector de W y un vector de $W^{\perp}$.

En efecto:

1) $$\begin{aligned}(Y;Z) &= (BX; X - Y) = (BX; X - BX) = (BX)^t(X - BX) \\ &= X^t B^t (X - BX) = X^t(B^t X - B^t BX) = X^t(BX - B^2 X) \\ &= X^t(BX - BX) = 0\end{aligned}$$

2) $X = Y + Z,\ Y \in W \ \wedge\ Z \in W^{\perp}$(Descomposición unica)

Sea $\{u_1, u_2, \cdot\cdot\cdot, u_p\}$ una base ortonormal para W,

Así $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot\cdot + x_pu_p + x_{p+1}u_{p+1} + \cdot\cdot + x_nu_n$

es inmediato que $x_i = (X; u_i),\ 1 \le i \le p,$ así $Y = \sum_{i=1}^{n}(X;u_i)u_i \in W$, a este vector se suele llamar $proy_W X$.

Por otra parte $Z = X - Y \Rightarrow$

$$(Z;u_1) = (X;u_1) - (X;u_1)(u_1;u_1) - (X;u_2)\cdot 0 - (X;u_3)\cdot 0 - \cdot\cdot\cdot - 0 = 0$$

Entonces Z es ortogonal a u_1. De manera semejante, Z es ortogonal a cada u_i de la base para W. Por tanto Z es ortogonal a todo vector de W, es decir, Z está en $W^{\perp}$.

b) De inmediato se sabe que

$$W = \langle\{(1, -1, -2)\}\rangle \text{ (Vect. col. de } P_W)$$

Que representa a una recta en $\mathbb{R}^3$.

Problema 90.

Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

para determinar el máximo de la función $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. ¿Cuál es el punto donde se produce este máximo?

Solución.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz dice: $(\vec{u}; \vec{v}) \leq |((\vec{u}; \vec{v})| \leq ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$, luego

$$2x + 3y + 4z \leq \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{29} \Rightarrow$$

el máximo de $f(x, y, z)$ es $\sqrt{29}$

Ahora, como $(\vec{u}; \vec{v}) = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| cost = ||\vec{u}|| \, cost$ y $(\vec{u}; \vec{v})$ es máx. cuando $cost = 1 \Rightarrow \vec{u}$ es paralelo a $\vec{v}$ entonces es válido suponer que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k\vec{u} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 3k \\ z = 4k \end{cases}$$

Con lo que: $(2k)^2 + (3k)^2 + (4k)^2 = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$

Así: $x = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$ y $z = \dfrac{4}{\sqrt{29}}$

Problema 91.

a) Utilice la factorización QR para encontrar una solución por mínimos cuadrados de $AX = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) Se dice que A y B matrices de $n \times n$ son semejantes, si $B = P^{-1}AP$ para alguna matriz P, invertible.

Demuestre que dos matrices semejantes tienen: el mismo determinante, rango y traza.

Solución.

a) $AX = b \Leftrightarrow A^t AX = A^t b \Leftrightarrow X = (A^t A)^{-1} A^t b$ pero $A = QR \Rightarrow$
$X = [(QR)^t QR]^{-1}(QR)^t b = (R^t Q^t QR)^{-1} R^t Q^t b = R^{-1} Q^t b$

Por Gram-Schmidt se obtienen

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{5}/10 \\ 3\sqrt{5}/10 \\ \sqrt{5}/10 \\ \sqrt{5}/10 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ 0 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

Así:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 3\sqrt{5}/10 & -\sqrt{6}/6 \\ -1/2 & 3\sqrt{5}/10 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/6 \\ 1/2 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} \text{ y } R = Q^t A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{5} & 3\sqrt{5}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix}$$

$$X = R^{-1} Q^t\, b = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & -\sqrt{6}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} Q^t\, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

b)

$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A|$.

$r(B) = r(P^{-1}AP)$ pero $r(MN) = r(NM)$, entonces
$= r(APP^{-1}) = r(A)$.

$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A)$.

Problema 92.

Sea A una matriz de orden n con $a_{ij} = 1, \forall\, i, j$. Determine un número c tal que $I_n + cA$ sea la inversa de $I_n - A$.

Solución.

Como $I_n + cA$ es inversa de $I_n - A$ se debe tener: $(I_n - A)(I_n + cA) = I_n$
$\Leftrightarrow I_n + (c-1)A - cA^2 = I_n \Leftrightarrow (c-1)A - cnA = 0$; note que $A^2 = nA$.

Así: $(c - 1 - cn)A = 0 \Rightarrow c - 1 - cn = 0$ pues $A \neq 0$; por tanto $c = \dfrac{1}{1-n}$,
$n > 1$.

Problema 93.

a) Si A y B son matrices cuadradas de orden n, tales que $AB = A$ y $BA = B$ demuestre que A^t es una matriz idempotente.
b) Sea $B = A(A^tA)^{-1}A^t,\ A \in M_{m\times n}$ demuestre que $B^2 + B^t = 2\,B$

Solución.

a) Por demostrar que $(A^t)^2 = A^t$

En efecto $(A^t)^2 = A^tA^t = (AB)^t(AB)^t = B^t(A^tB^t)A^t = B^t(BA)^tA^t$

$$= B^t(B^tA^t) = B^t(AB)^t = B^tA^t = (AB)^t = A^t$$

b) $B^2 + B^t = A[(A^tA)^{-1}A^tA](A^tA)^{-1}A^t + (A(A^tA)^{-1}A^t)^t$

$$= AI_n(A^tA)^{-1}A^t + A[(A^tA)^{-1}]^tA^t$$
$$= A(A^tA)^{-1}A^t + A[(A^tA)^t]^{-1}A^t$$
$$= A(A^tA)^{-1}A^t + A(A^tA)^{-1}A^t = B + B = 2B$$

Problema 94.

Encontrar α, β, γ de manera que la siguiente matriz sea ortogonal

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 5/\sqrt{5} \\ 1 & \beta & -2/\sqrt{5} \\ 2 & \gamma & -4/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Solución.

Por definición A es ortogonal si y solo si $A^t = A^{-1}$ entonces se debe cumplir $A\,A^t = A^tA = I_3 \Rightarrow$

$$A\,A^t = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 5/\sqrt{5} \\ 1 & \beta & -2/\sqrt{5} \\ 2 & \gamma & -4/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 5/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \end{bmatrix} = I_3,\ \text{de donde}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones, que sigue:

$$\frac{1}{9}(4 + \alpha^2 + 5) = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$
$$\frac{1}{9}(2 + \alpha\beta - 2) = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0$$
$$\frac{1}{9}(4 + \alpha\gamma - 4) = 1 \Rightarrow \alpha\gamma = 0$$
$$\frac{1}{9}(1 + \beta^2 + \frac{4}{5}) = 1 \Rightarrow \beta^2 = \frac{36}{5} \Leftrightarrow \beta = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{1}{9}(2 + \beta\gamma + \frac{8}{5}) = 0 \Rightarrow \gamma = \mp\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{9}(4+\gamma^2+\frac{16}{5})=1 \Rightarrow \gamma = \mp\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Así resultan dos ternas de valores para α, β y γ que son:

$$\alpha = 0,\ \beta = \frac{6}{\sqrt{5}},\ -\frac{3}{\sqrt{5}} \ \vee\ \alpha = 0,\ \beta = -\frac{6}{\sqrt{5}},\ \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Problema 95.

Si

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ a & -2 & 1 & -1 \\ b & c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a, b y c de modo que $A = LU$

b) Ocupe L y U para resolver $AX = C_i$ en los siguientes casos de C_i,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución.

a) Se debe tener que : $\frac{a}{1} = -2 \Rightarrow a = -2;\ \frac{b}{1} = 3 \Rightarrow b = 3,$ así resulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & c & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & c-6 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\frac{c-6}{2} = 1 \Rightarrow c = 8.$$

b)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} = U$$

Por tanto

$$AX = C_i \Leftrightarrow L(UX) = C_i; \text{ donde: } LY = C_i \ \wedge\ UX = Y$$

$$LY = C_i \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

De aquí se obtienen:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_4 \\ -\frac{1}{2}x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix};\ X_2 = \begin{bmatrix} y_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y_4 \\ -\frac{1}{2} + 2y_4 \\ y_4 \end{bmatrix};\ \ X_2 = \begin{bmatrix} -1 + z_4 \\ \frac{7}{8} - \frac{1}{2}z_4 \\ -\frac{5}{4} + 2z_4 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Problema 96.

La solución de un sistema lineal está dado por

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix};\ t_1,\ t_2 \text{ parámetros}$$

a) ¿Cuantas variables tiene el sistema?, cuáles estan consideradas como parámetros

b) Determine la solución considerando a las variables x_1 y x_2 como parámetros

c) ¿Es otra solución particular del sistema el vector $[\,-11 \quad 1 \quad 3 \quad 3\,]^t$?

d) ¿Es $[\,-1 \quad 2 \quad -3 \quad 1\,]^t$ una solución del sistema homogeneo asociado?

Solución.

a) Cuatro variables, x_2 y x_4.

b) Se pide que x_1, x_2 esten consideradas como parámetros.

Dado que $x_1 = 2 + 2x_2 - 5x_4$

$x_3 = -3 - 3x_2 + 3x_4$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 5 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & \vdots & -3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & \vdots & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & 1 & 0 & \vdots & -\frac{9}{5} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix};\ t_1,\ t_2 \text{ parámetros}$$

c) Para que sea otra solución particular se debe tener que

$$\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 3,$$

$2 + 2t_1 - 5t_2 = -11$ y $3 = -3 - 3t_1 + 3t_2$ éstas dos últimas ecuaciones se cumple para $t_1 = 1,\ t_2 = 3$ por tanto es otra solución particular

d) Para que $[\,-1 \quad 2 \quad -3 \quad 1\,]^t$ sea una solución del sistema homogeneo asociado se debe tener

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 1,$$ por tanto es una solución del sistema homogeneo asociado.

Problema 97.

Si $[1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 1]^t$ es una solución particular del sistema

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2\,x_3 - \ x_4 + 3x_5 &= a \\ -x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 + \ x_5 &= b \\ 3\,x_1 - 4\,x_2 - \ x_3 \qquad\quad + \ x_5 &= c \\ 5\,x_1 - 6\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_4 + 3x_5 &= d \end{aligned}$$

i) Determine a, b, c y d.

ii) Resuelva el sistema

Solución.

a) Si $[1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 1]^t$ es una solución particular del sistema dado debe satisfacerlo, es decir

$$\begin{aligned} 1 \quad + 2 \cdot 0 - \ 2 + 3 \cdot 1 &= a \Rightarrow a = 2 \\ -1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 &= b \Rightarrow b = 10 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \qquad\quad + \ 1 &= c \Rightarrow c = -4 \\ 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 &= d \Rightarrow d = -12 \end{aligned}$$

b)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & -6 & 3 & -4 & 3 & -12 \end{array}\right] \sim \cdots$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 98.

Sea $A \in M_{4\times 2}$ y $P = A(A^t A)^{-1} A^t$

a) Probar que P es idempotente y simétrica.

b) Calcule P si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$

Solución.

a) $P^2 = A(A^t A)^{-1} A^t A (A^t A)^{-1} A^t = A(A^t A)^{-1} A^t = P \Rightarrow P$ es idempotente

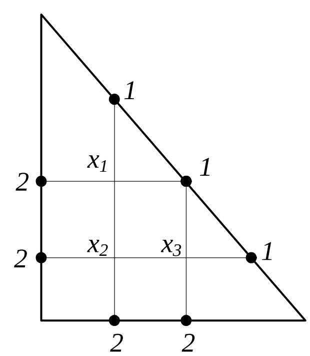
$P^t = \{A(A^t A)^{-1} A^t\}^t = A\{(A^t A)^{-1}\}^t A^t = A(A^t A)^{-1} A^t \Rightarrow P$ es simétrica

b) $A^t A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t A)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -4 & 2 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

Problema 99.

Calcule la temperatura en los puntos x_1, x_2 y x_3, en la placa metálica triangular que se ilustra en la figura, si la temperatura en cada punto interior es el promedio de las que prevalecen en sus cuatro puntos vecinos.



Solución.

Sean x_1, x_2 y x_3 las temperaturas en estos puntos, se debe tener

$$x_1 = \frac{1+2+1+x_2}{4} \Leftrightarrow 4\,x_1 - x_2 = 4$$

$$x_2 = \frac{2+x_1+x_3+2}{4} \Leftrightarrow -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4$$

$$x_3 = \frac{x_2 + 1 + 1 + 2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -x_2 + 4x_3 = 4$$

De donde resolviendo este sistema mediante

$$X = A^{-1}b = \tfrac{1}{56}\begin{bmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Luego las temperaturas son: $\frac{10}{7}$, $\frac{12}{7}$ y $\frac{10}{7}$ de los puntos x_1, x_2 y x_3 respectivamente.

Problema 100.

En el espacio $\mathbb{R}^4$, se dan los vectores:

$$u_1 = (1, 1, 1, 1),\ u_2 = (1, 2, 0, -1),\ u_3 = (2, 3, 1, 1) \text{ y } u_4 = (a, b, c, d,)$$

a) Demuestre que u_1, u_2, u_3 y u_4 son linealmente dependientes, si y sólo si $2a = b + c$

b) ¿Es posible determinar valores para a, b, c y d tales que

$$\langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle = \langle\{u_2 u_3, u_4\}\rangle?$$

Solución.

a) i) Se debe exigir que la ecuación

$$x_1(1, 1, 1, 1) + x_2(1, 2, 0, -1) + x_3(2, 3, 1, 1) + x_4(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$$

tenga infinitas soluciones, es decir

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & 3 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & c & 0 \\ 1 & -1 & 1 & d & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a+2b+d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+c-2a & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$b + c - 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = b + c$

ii) Ahora si $2a = b + c \Leftrightarrow$ b $= 2a - c \Rightarrow$ el vector $u_4 = (a, 2a - c, c, d,)$ es combinación lineal de los demás pués

$$u_4 = (a, 2a - c, c, d,) = (3c - a - d)u_1 + (c - d)u_2 + (a - 2c + d)u_3$$

$\Rightarrow u_1,\ u_2,\ u_3$ y u_4 son linealmente dependientes.

b) El espacio generado por u_1, u_2, u_3 debe cumplir que existan escalares a_1, a_2

y a_3, tales que $\forall\,(x,y,z,t)$ se tenga:

$$a_1(1,1,1,1)+a_2(1,2,0,-1)+a_3(2,3,1,1)=(x,y,z,t)\Rightarrow$$

$$-2x+y+z=0, \qquad (1)$$

Análogamente, el espacio generado por $u_2,\ u_3,\ u_4$ debe cumplir que existan escalares a_4, a_5 y a_6, tales que $\forall\,(x,y,z,t)$ se tenga

$$a_4(1,2,0,-1)+a_5(2,3,1,1)+a_6(a,b,c,d)=(x,y,z,t),$$

para cumplir con (1) y sea consecuente con la última ecuación, es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones para obtener $a,\ b,\ c$ y d

$$b+c-2a=0 \ \wedge\ a+d-3c\neq 0$$

Problema 101.

Resolver el sistema para X e Y matrices de orden determinado.

$$A\,X\,B=C$$
$$X^t\,Y=B^2$$

donde:

$$A=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix},\ \ B=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&2&1\\2&1&0\end{bmatrix}\ \text{ y }\ C=\begin{bmatrix}15&-5&0\\5&0&10\end{bmatrix}$$

Solución.

Como $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}$ y $B^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&-2&3\\2&4&-1\\-4&-3&2\end{bmatrix}$ entonces

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{bmatrix}30&10&-5\\-13&-6&4\end{bmatrix}$$

Ahora, como X^t es de 3×2 entonces Y es de 2×3, sea $Y=\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3\\y_4&y_5&y_6\end{bmatrix}$

Luego $X^t\,Y=B^2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}30&-13\\10&-6\\-4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3\\y_4&y_5&y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-5&-3\\2&5&2\\2&0&-3\end{bmatrix}$

De aquí se obtienen tres sistemas, cada uno con tres ecuaciones y dos incógnitas. Es suficiente observar que uno de los tres sistemas, por ejemplo:

$$30\,y_1-13\,y_4=-3$$
$$10\,y_1-\ \ 6\,y_4=2$$

$$-4y_1 + \ \ 4y_4 = 2$$

es incompatible, por tanto no existe Y y luego el sistema para X e Y no tiene solución.

Problema 102.

Sea A una matriz de $n \times n$ tal que $A^3 = 0_{M}$. Demuestre que $A + I_n$ tiene inversa y determínela en términos de A.

Demostración.

$A^3 = 0_{M} \Leftrightarrow \quad A^3 + I_n^3 = I_n \Leftrightarrow (A + I_n)(A^2 - A + I_n) = I_n$ ecuación que nos indica que existe la inversa, pués el producto de los determinantes de $A + I_n$ y de $(A^2 - A + I_n)$ debe ser 1 por tanto ninguno de los dos puede ser 0.

Ahora por la unicidad de la inversa se tiene que

$$(A + I_n)^{-1} = A^2 - A + I_n$$

Problema 103.

Dado el sistema lineal $AX = b$, $A \in M_{4\times 4}$ y la solución del sistema homogeneo asociado es

$$X_h = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix};\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

a) ¿Es A invertible? (Justifique su respuesta)

b) Si una solución particular del sistema dado es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t$, resolver el sistema. ¿Es posible determinar A? , en caso afirmativo encuéntrela..

c) Resolver el sistema, considerando como parámetros las variables x_3 y x_4. Considere la solución particular dada en b).

d) Al sistema dado se le agrega la ecuación $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = k$ Determine el valor de la constante k, para que se conserve la solución encontrada por Ud. en la parte b).

e) ¿Es? $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}^t$ también una solución del sistema homogeneo asociado.

Solución.

a) A **no** es invertible, pués si la solución del sistema tiene dos parámetros entonces ella tiene exactamente 2 filas nulas.

b) La solución es

$$X=\begin{bmatrix}0\\0\\4\\6\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix};\ t_1,t_2\in\mathbb{R}$$

Primero notemos que A **no es única**, vamos a encontrar una de ellas

De la solución obtenemos

$$\begin{bmatrix}-2&-3&1&0&\vdots&4\\1&-4&0&1&\vdots&6\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2&-3&1&0&\vdots&4\\1&-4&0&1&\vdots&6\\-5&9&1&-3&\vdots&-14\\0&-11&1&2&\vdots&16\end{bmatrix};\text{ de aquí}$$

obtenemos

$$A=\begin{bmatrix}2&3&-1&0\\1&-4&0&1\\-5&9&1&-3\\0&-11&1&2\end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix}-2&-3&1&0&\vdots&4\\1&-4&0&1&\vdots&6\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\sim\cdots\cdots\sim\begin{bmatrix}0&1&-\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&\vdots&-\frac{16}{11}\\1&0&-\frac{4}{11}&\frac{3}{11}&\vdots&\frac{2}{11}\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

Así.

$$X=\begin{bmatrix}\frac{2}{11}\\-\frac{16}{11}\\0\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}\frac{4}{11}\\\frac{1}{11}\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\\frac{2}{11}\\0\\1\end{bmatrix};\ t_1,t_2\in\mathbb{R}$$

d) Una forma de hallar k, es exigir que la solución dada en b) satisfaga la ecuación dada, es decir que

$$2t_1+3t_2-(4+2t_1+3t_2)+5(6-t_1+4t_2)=k\Leftrightarrow -5t_1+20t_2+26=k$$

relación que contradice la naturaleza de k pués esta debe ser constante, por tanto no existe k posible de modo que se mantenga la solución del sistema.

e) Para que $\begin{bmatrix}2&-3&-5&2\end{bmatrix}^t$ sea una solución del sistema homogeneo asociado deben existir t_1 y t_2 tales que

$$t_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\\-5\\2\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$t_1 = 2,\ t_2 = -3, \quad 2t_1 + 3t_2 = -5 \ \wedge \ -t_1 + 4t_2 = 2$ la tercera ecuación se satisface pero la cuarta no $(-14 \neq 2)$ por tanto $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}^t$ no es una solución del sistema homogeneo asociado.

Problema 104.

Sea $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdot \cdot \cdot \alpha_n\}$, $A \subseteq V$, V espacio vectorial sobre K, A linealmente independiente, demuestre que si $\beta \in \langle A \rangle$, entonces β se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de A.

Solución.

Supongamos que hay dos formas distintas de expresar β, es decir sean:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \ \text{ y } \ \beta = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i$$

restando miembro a miembro estas expresiones se tiene,

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \alpha_i$$

pero los α_i son L.I. entonces $x_i - y_i = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots n$

lo que prueba que β se escribe de manera única en C.L. de los vectores A.

Problema 105.

En $P_2/\mathbb{R}$ dados:

$p(x) = 2 + x,\ q(x) = 1 - x^2,\ r(x) = -1 + x + x^2,\ s(x) = -x + x^2$

Sean $S_1 = \langle \{p(x), q(x)\rangle$ y $S_2 = \langle \{r(x), s(x)\}\rangle$, determine un vector $u(x) \in S_2$, tal que

$$P_2 = S_1 \oplus \langle \{u(x)\} \rangle$$

Solución.

Sea $u(x) = s(x) = -x + x^2$, se debe verificar que

$\{2 + x, 1 - x^2, -x + x^2\}$ es un conjunto L.I., pues de ser así, entonces

$$S_1 \cap \langle \{u(x)\} \rangle = \{\theta\} \ \text{ y } \ P_2 = S_1 \oplus \langle \{u(x)\} \rangle$$

Por tanto: $a_1(2 + x) + a_2(1 - x^2) + a_3(-x + x^2) = 0$ conduce a

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, resultado que se pretendía.

Problema 106.

Sean las bases de $\mathbb{R}^3$;

$S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$S_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$
$S_3 = \{(3,2,-1),(4,1,3),(1,1,-1)\}$

y dada la transformación representada en la base S_3 por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine las imágenes de los vectores básicos de la base S_2.

b) Determine la matriz de transformación en la base S_1.

c) Determine la matriz de la transformación inversa en la base S_2.

Solución.

a) Primero determinamos los vectores coordenada de los vectores de la base S_2 con respecto a la base S_3, resolviendo el sistema simultaneo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 18 & 5 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 18 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -22 & -6 \\ 24 & 39 & 11 \\ -18 & -29 & -9 \end{bmatrix}$$

Las vectores columna de esta matriz, representan los vectores coordenada de las imágenes pedidas pero con respecto a la base S_3, por tanto tales imágenes resultan finalmente:

$T(1,1,1) = -13(3,2,-1) + 24(4,1,3) - 18(1,1,-1) = (39,-20,103)$

Analogamente, $T(0,1,1) = (61,-34,168)$ y $T(0,0,1) = (17,-10,48)$

b)

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ S_3 & \longrightarrow & S_3 \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ & B & \end{array} \Rightarrow B = PAP^{-1}$$

donde: $P=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -7 & 13 & 5 \end{bmatrix}$

luego resulta $B=\begin{bmatrix} -22 & 44 & 17 \\ 14 & -24 & -10 \\ -65 & 120 & 48 \end{bmatrix}$

c)

$$\begin{array}{ccc} & B^{-1} & \\ S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ Q\uparrow & & \uparrow Q \Rightarrow C^{-1}=Q^{-1}B^{-1}Q \\ S_2 & \longrightarrow & S_2 \\ & C^{-1} & \end{array}$$

donde: $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 48 & -72 & -32 \\ -22 & 49 & 18 \\ 120 & -220 & -88 \end{bmatrix}$, Así $C^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -56 & -104 & -32 \\ 101 & 171 & 50 \\ -233 & -375 & -106 \end{bmatrix}$

Problema 107.

Sea β es un vector propio de A con valor propio correspondiente t y sea k un escalar, demuestre que β es un vector propio de $A-kI_n$ con valor propio correspondiente $t-k$.

Demostración.

Por hipótesis $A(\beta)=t\beta$, de aquí se tiene

$$A(\beta)-k\beta=t\beta-k\beta \Leftrightarrow (A-kI_n)\beta=(t-k)\beta \Rightarrow$$

β es un vector propio de $A-kI_n$ con valor propio $t-k$.

Problema 108.

Demuestre que toda función que proyecta vectores de V, ortogonalmente, sobre un subespacio W del espacio vectorial V, es una transformación lineal.

Demostración.

Sea $T:V\rightarrow W$ tal que $T(x)=P_W x$; en que $P_W=A(A^tA)^{-1}A^t$ en que las columnas de A esta formada por una base de W

Así: 1) $T(x_1+x_2)=P_W(x_1+x_2)=P_Wx_1+P_Wx_2=T(x_1)+T(x_2)$

2) $T(kx)=P_W(kx)=kP_Wx=k\,T(x)$

luego T, es una transformación lineal.

Problema 109.

En $M_{4\times 1}$, dado $W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$

a) Factorice $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\\1&-2\\1&1\end{bmatrix}$ en QR y ocupe Q y R para determinar $y=ax+b$ que mejor representa a los puntos: $(0,1)$, $(-1,2)$, $(-2,0)$ y $(1,4)$.

b) Encuentre un vector μ no nulo, tal que $P\mu=\mu$.

c) Determine el vector β en el espacio columna de A, más cercano al vector $[2\quad 3\quad -1\quad 0]^t$.

Solución

a) De inmediato $Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&-\frac{3}{\sqrt{5}}\\1&\frac{3}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$;

como $A=QR\Leftrightarrow Q^tA=Q^tQR=I_2R\Rightarrow R=Q^tA=\begin{bmatrix}2&-1\\0&\sqrt{5}\end{bmatrix}$

$y=ax+b$, $X=\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}$, $X=(A^tA)^{-1}A^tY$ donde $Y=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix}$

$X=[(QR)^t(QR)]^{-1}(QR)^tY=R^{-1}Q^tY$

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-1}{\sqrt{5}}&\frac{-3}{\sqrt{5}}&\frac{3}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}46\\22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.3\\1.1\end{bmatrix}$$

finalmente: $y=1.1x+2.3$

b) μ puede ser cualquiera de los vectores generadores de W.

c) $\beta = proy_W \alpha$, con $\alpha = [2 \quad 3 \quad -1 \quad 0]^t \Rightarrow$

$$\beta = A(R^{-1}Q^t\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Problema 110.

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -9 & -9 \\ 6 & -8 & -7 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 9 \\ -9 & 11 & 16 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

¿Está b en el espacio imagen de T, en que $T(X) = AX$? Si así es, encuentre un X cuya imagen bajo T sea b.

Solución.

El sistema $AX = b$ debe ser compatible, y como:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & -9 & -9 & 1 \\ 6 & -8 & -7 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 9 & 5 \\ -9 & 11 & 16 & 7 & -5 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-17}{2} & \frac{-37}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{2} & \frac{-29}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

esta matriz nos indica que el sistema en cuestión es compatible, por tanto b está en el espacio imagen de T. Hay infinitos X cuya imagen bajo T sea b, uno de ellos se obtiene para $x_4 = 0$ y resulta ser $X = \dfrac{1}{3}[1 \quad -2 \quad 1 \quad 0]^t$.

Problema 111.

Sean

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Averigue a cuál de los subespacios: $Ker\, A$, $Im\, A$ o a ninguno pertenecen los vectores u y v.

b) Encuentre la $proy_W u$, si $W = Im\, A^t$, explique geométricamente su resultado.

Solución.

a) De inmediato se tiene

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u \in Ker\, A$$

Para ver si $u \in Im\, A$, se resuelve:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow u \in \; Im\, A$$

Analogamente se determina que: $v \notin Ker\, A$ y que $v \notin Im\, A$

b) Como $r(A) = 2 \Rightarrow \; W = Im\, A^t = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$

Así: $proy_W u = A_1 x$; donde $x = (A_1^t A_1)^{-1} A_1^t u$, con $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

efectuando cálculos se obtiene: $x = \; = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow proy_W u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Este resultado nos indica que el vector director del plano que representa W es el vector $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Problema 112

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una transformación lineal definida por

$$T(1,1,1) = (1,2,-1)$$
$$T(0,1,1) = (2,-3,0)$$
$$T(0,0,1) = (1,-5,1)$$

a) Determine la matriz representativa de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Resuelva para x , y y z la ecuación :

$$2\,T(x-1,y,z+1) - 3\,T(y,z,x) = (T \circ T)(2,2,2)$$

Solución.

a) $T(1,0,0) = (1,2,-1) - (2,-3,0) = (-1,5,-1)$

$T(0,1,0) = (2,-3,0) - (1,-5,1) = (1,2,-1)$

$T(0,0,1) = (1,-5,1)$

De donde se obtiene la matriz representativa pedida, que es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $2\,T(x-1, y, z+1) - 3\,T(y, z, x) = (T \circ T)(2, 2, 2) \Leftrightarrow$

$$T(2x - 3y - 2, 2y - 3z,\ -3x + 2z + 2) = T(2, 4,\ -2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x - 3y - 2 \\ 2y - 3z \\ -3x + 2z + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

lo que conduce al sistema:

$$\begin{aligned} 5x - 5y + z &= 4 \\ 25x - 11y - 16z &= 48 \\ 5x - y - 5z &= 12 \end{aligned}$$

Resolviendo resultta: $x = \frac{14}{5} + \frac{13}{10}z;\ y = 2 + \frac{3}{2}z,\ z$ parámetro.

Problema 113.

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

a) Determine los valores y vectores propios de A.

b) Resuelva $T^{20}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T^{-21}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T^{-11}(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix})$

c) Si A es la matriz representativa de una T. L. de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a $S_1 = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\}$. Determine fórmulas para $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$ y para $T^{-1}(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})$.

Solución.

a) Valores propios:

$$P_A(t) = |tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & 3 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = 2$$

Vectores propios:

$$t_1 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Note que existe $T^{-1} \Rightarrow T^{40}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + T^{9}(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}) \Leftrightarrow$

$A^{40}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A^{9}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow PD^{40}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1} + PD^{9}P^{-1}$

donde; $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Problema 114.

La matriz asociada a una T.L. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a las bases $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y $\{\beta_1, \beta_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz de T con respecto a las bases: $\{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\} \to \{\beta_1', \beta_2'\}$

donde $\alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_2' = \alpha_1 + \alpha_3$; $\alpha_3' = \alpha_3 + \alpha_2$

$2\,\beta_1' = \beta_1 + \beta_2$; $2\,\beta_2' = \beta_1 - \beta_2$

Solución.

Sean $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \to S_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$

$S_3 = \{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\} \to S_4 = \{\beta_1', \beta_2'\}$

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "A"] & S_2 \\ S_3 \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B"'] & S_4 \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd} \Rightarrow B = Q^{-1}AP \ ; \ Q = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & - \end{bmatrix}$$

Problema 115.