Capítulo 9

Polinomios y Ecuaciones

9.1. Polinomios

Definición 1.

Sea $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, se dice que $p(x)$ es un polinomio en una variable, y es de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$.

Los a_i se acostumbran a llamar coeficientes del polinomio, si $a_n \neq 0$ se dice que el polinomio es de grado n.

Nota. 1

Debemos agregar que no siempre la variable de un polinomio es un número complejo, pueden ser también entre otras: una matriz, una funcion, ... etc. que obviamente requieren de otra definición, pero que, no trataremos en este texto.

9.2. Igualdad

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0 \quad \wedge \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ con $b_n \neq 0$

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \; \forall \, i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Demostración.

$p(x) - q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)\, x^i = 0,$ aceptando la independencia lineal de

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ que dice: $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + c_n x^n = 0 \Leftrightarrow$

$c_0 = c_1 = \cdot \cdot \cdot \cdot = c_n = 0$ entonces se tiene $a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i$

La parte $a_i = b_i \Rightarrow p(x) = q(x)$ es inmediata.

9.3. Suma y Producto

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0 \quad \wedge \quad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ con $b_m \neq 0$ supóngase que $n \geq m$, entonces:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) \text{ donde, grado}(p+q) \leq n \text{ o bien grado } 0.$$

$$(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x) \text{ donde, grado } (p \cdot q) = m + n$$

Propiedad 1.

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0 \quad \wedge \quad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ con $b_m \neq 0$ tales que $p(x) \cdot q(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$, entonces $p(x) = 0 \ \vee \ q(x) = 0$

Demostración.

Si $p(x) \neq 0 \ \wedge \ q(x) \neq 0$ entonces tanto $p(x)$ como $q(x)$ tienen grado, luego también $p(x) \cdot q(x)$ entonces $(p \cdot q)(x)$ no es el polinomio 0, lo que contradice la hipótesis.

Propiedad 2.

Sean $p(x), q(x)$ y $r(x)$ tres polinomios tales que $p(x) \neq 0$.

Si $p(x) \cdot q(x) = p(x) \cdot r(x), \forall x \in \mathbb{C}$, entonces $q(x) = r(x)$.

Demostración.

Como $p(x) \cdot q(x) = p(x) \cdot r(x) \Leftrightarrow p(x)[q(x) - r(x)] = 0$ pero $p(x) \neq 0$ y por, propiedad 1. se implica $q(x) - r(x) = 0 \Leftrightarrow q(x) = r(x)$.

Definición 2.

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que $q(x) \neq 0$. Se dice que $q(x)$ divide a $p(x)$ o que $q(x)$ es un factor de $p(x)$, si y solo si existe un polinomio $s(x)$ tal que $p(x) = s(x) \cdot q(x)$.

Como $q(x) \neq 0$ y $p(x) = s(x) \cdot q(x) \Leftrightarrow \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x)$

Ejemplo 1.

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x - 1$ son factores del polinomio $p(x) = x^3 - 1$

pués $p(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ note que en este caso también $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$es un factor de $p(x)$.

Observación 1.

La definición 2 dá a lugar un gran número de factorizaciones importantes, una de ellas es la del ejemplo 1, otras como por ejemplo son:

1) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdot \cdot \cdot \cdot + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$

2) $x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$

3) $x^8 - a^8 = (x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)$

4) $x^4 + 1 = \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right)$

Nota 2.

A los polinomios con coeficientes reales los llamaremos, **polinomios reales**.

Definición 3.

Un polinomio real se dice que es **primo** si y solo si no es posible factorizarlo en polinomios reales.

Ejemplo 2.

$p(x) = x^2 + 3x - 4$ no es primo, en cambio $q(x) = x^2 + 1$ es primo.(Ud. puede fácilmente comprobarlo).

Propiedad 3.

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, con $q(x) \neq 0$, entonces existen dos únicos polinomios $s(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$ ó $r(x) = 0$.

Demostración.

Se deja propuesta.

Notas 3.

1) Es costumbre llamar a $p(x)$ como el polinomio dividendo, a $q(x)$ como el polinomio divisor, a $s(x)$ el polinomio cuociente y a $r(x)$ el polinomio resto.

2) Si en caso de ser $r(x) = 0$, se acostumbra a decir que la división de $p(x)$ por $q(x)$ es exacta.

3) Si $r(x) = 0 \Rightarrow p(x) = s(x)q(x)$ y se dice que $p(x)$ es factorizable y que $s(x)$ y $q(x)$ son sus factores.

4) De la propiedad 3, como $q(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$

9.3 Algoritmo de la División

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \text{(grado de } p(x) \geq \text{grado de } q(x))$$

1. Se ordenan los términos de $p(x)$ y $q(x)$ en orden decreciente de sus potencias.
2. Se divide el término de mayor potencia de $p(x)$ por el término de mayor potencia de $q(x)$, sea este resultado denotado por α_x (que puede ser constante)
3. Se multiplican cada uno de los términos de $q(x)$, por α_x obtenido en 2. y se restan del polinomio $p(x)$ obteniéndose $p_1(x)$, que és un grado menor que $p(x)$
4. Se repite el proceso(1, 2, y 3) para $p_1(x)$, obteniéndose $p_2(x)$ y así sucesívamente, hasta que el grado de $p_i(x)$ sea menor que el grado de $q(x)$.
5. Si grado de $p_i(x) <$ grado de $q(x)$ entonces $r(x) = p_i(x)$, por otra parte $s(x)$ es la suma de todos los α_x.

Ejemplo 3.

Dividir $p(x) = 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 7x + 10$ por $q(x) = x^2 - 2x$

$$2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 10 \div x^2 - 2x = 2x^2 - 4x - 2$$
$$\underline{-2x^4 + 2x^3}$$
$$-4x^3 + 6x^2 - 7x + 10$$
$$\underline{+4x^3 - 8x^2}$$
$$-2x^2 - 7x + 10$$
$$\underline{+2x^2 - 4x}$$
$$-11x + 10$$

Notemos que de aquí:

$$r(x) = -11x + 10$$
$$s(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

Por tanto : $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 2x^2 - 4x - 2 + \dfrac{-11x + 10}{x^2 - 2x}$

O bien: $p(x) = (2x^2 - 4x - 2)(x^2 - 2x) - 11x + 10$

9.4. Teorema del Resto

El resto de dividir $p(x)$ por $(x-\alpha)$ es $p(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Demostración.

Note que el resto de la división por $(x-\alpha)$ es una constante. Sea A esta constante, entonces $p(x) = s(x)(x-\alpha) + A$ en esta ecuación haciendo $x = \alpha$ obtenemos $A = p(\alpha)$.

Ejemplo 4.

El resto de dividir $p(x) = 3x^3 + 7x + 2$ por $x + 2i$ es

$p(-2i) = 3(-2i)^3 + 7(-2i) + 5 = 5(2i + 5)$

9.5. División Sintética

Se trata de un método que permite efectuar la división de un polinomio $p(x)$ por $(x-\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n x^n$ entonces por el teorema del resto podemos expresar

$p(x) = (x-\alpha)(c_0 + c_1 x + \cdot\cdot\cdot\cdot + c_{n-1} x^{n-1}) + p(\alpha)$ de donde por igualdad de polinomios, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&p(\alpha) = a_0 + \alpha c_0, \\
&c_0 = a_1 + \alpha c_1, \\
&c_1 = a_2 + \alpha c_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_{n-2} = a_{n-1} + \alpha c_{n-1} \\
&c_{n-1} = a_n
\end{aligned}
$$

de aquí note que $p(\alpha) = a_0 + \alpha c_0 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n\alpha^n$ como era de esperar.

En forma esquemática, los resultados precedentes los expresaremos mediante

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots\cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\alpha & & \alpha c_{n-1} & \alpha\, c_{n-2} & \cdots\cdots & \alpha\, c_2 & \alpha c_1 & \alpha c_0 \\
\hline
 & a_n & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots\cdots & c_1 & c_0 & p(\alpha)
\end{array}
$$

9.6. Raíz de un polinomio

Definición 4.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x)$ si y solo si $p(\alpha) = 0$.

Ejemplo 5.

Los números -2, $2i$ y $-2i$ son raíces de $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ pués; $p(-2) = p(2i) = p(-2i) = 0$

Propiedad 4.

α es una raíz de $p(x)$ si y solo si $(x - \alpha)$ es un factor de $p(x)$.

Demostración.

Por el teorema del resto $p(x) = s(x)(x - \alpha) + p(\alpha)$.

Por tanto α es una raíz de $p(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = 0$.

Si y solo si $p(x) = s(x)(x - \alpha) \Leftrightarrow (x - \alpha)$ es un factor de $p(x)$.

9.7. Teorema fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante tiene por lo menos una raíz.

Demostración.

La demostración de este teorema excede las intenciones de este texto, se dejará propuesta. Puede consultar entre otros el texto:

9.8. Multiplicidad

Definición 5.

Sea α una raíz de $p(x)$. Se dice que α es una raíz de multiplicidad k, $k \in \mathbb{N}$ si y solo si $(x - \alpha)^k$ divide a $p(x)$ pero $(x - \alpha)^{k+1}$ no lo divide.

Observación 2.

1) La división sintética es un buen argumento para encontrar raíces con cierto grado de multiplicidad.

2) Esta definición de multiplicidad, en el Álgebra lineal es llamada multiplicidad algebraica para no confundirla con la de multiplicidad geométrica, en el tema de valores y vectores propios.

Propiedad 5.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_r$ todas las raíces de $p(x)$ de grado $n \geq 1$, y sean $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$ sus multiplicidades respectivas, entonces

$$m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + m_r = n$$

Demostración.

Se debe tener que $(x-\alpha_1)^{m_1}$, $(x-\alpha_2)^{m_2}, \ldots, (x-\alpha_r)^{m_r}$ son factores de $p(x)$, por tanto:

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} (x-\alpha_2)^{m_2}, \ldots, (x-\alpha_r)^{m_r} \cdot s(x) \qquad (*)$$

Note que $s(x)$ no puede tener otras raíces, pués también lo serían de $p(x)$ por tanto $s(x)$ necesáriamente es constante, porque de lo contrario contradice el teorema fundamental del Álgebra. Con lo que el grado del polinomio del segundo miembro de $(*)$ es $m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + m_r$ y como es igual al grado de $p(x)$, se tiene que esta suma vale n

Nota 4.

La propiedad 5, comúnmente se enuncia como:

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, entre complejas y reales no necesariamente distintas.

Observación 3.

La siguiente observación se conoce por **Relaciones entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces.**

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_nx^n$ un polinomio de grado n $(a_n \neq 0)$ con coeficientes complejos y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sus raíces, no necesariamente distintas de la factorización $p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ al igualar los coeficientes de las distintas potencias se obtienen las siguientes fórmulas:

La suma de las raíces es igual a $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

La suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos es igual a $\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

La suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres es igual a $\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

y así sucesivamente hasta terminar con el producto de todas las raíces, igual a $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Propiedad 6.

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_nx^n$, un polinomio con todos sus coeficientes reales y sea $z = a + bi$, $b \neq 0$ una raíz de $p(x)$, entonces $\overline{z} = a - bi$ también es raíz de $p(x)$ y el polinomio es factorizable por $(x-a)^2 + b^2$.

Demostración.

Por hipótesis se tiene $p(z) = p(a+bi) = 0$, por demostrar que $p(\overline{z}) = 0$.

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n\overline{z}^n \\ &= a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n\overline{z^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + \overline{a_n z^n} \\ &= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n z^n} \\ &= \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Ahora, como $a+bi$ es raíz de $p(x)$ entonces $[x-(a+bi)]$ lo factoriza, analogamente para $a-bi$, $[x-(a-bi)]$ lo factoriza por tanto también

$[x-(a+bi)][x-(a-bi)] = [(x-a)^2 - (bi)^2] = (x-a)^2 + b^2.$

Propiedad 7.

Todo polinomio con coeficientes reales y de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Demostración.

En base a la propiedad 6, y como un polinomio de grado impar tiene un número impar de raíces, el número de raíces complejas es cero o par, luego por lo menos tiene una raíz real.

Propiedad 8.

Raíces racionales.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n x^n$, un polinomio con coeficientes enteros y sea $\dfrac{p}{q}$ una raíz de $p(x)$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ sin factores comunes. Entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Demostración.

Como $\frac{p}{q}$ es una raíz de $p(x)$ entonces

$p\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2(\frac{p}{q})^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n(\frac{p}{q})^n = 0$ multiplicando por q^n resulta

$a_0 q^n = -p\,[a_1 q^{n-1} + a_2 p\, q^{n-2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_n p^{n-1}]$ como p es factor del segundo miembro por la igualdad debe ser factor de $a_0 q^n$, luego p divide a a_0 o a q^n, pero como p y q no tienen factores comunes, se tiene que p divide a a_0.

Analogamente se tiene $a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + a_1 p\, q^{n-2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_{n-1} p^{n-1})$

y por argumento similar, se tiene que q divide a a_n.

Propiedad 9.

Raíces positivas. Regla de Descartes

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot\cdot + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$

Vamos a denotar por u el número de cambios de signo de los coeficientes del polinomio y por r el número de raíces positivas no necesariamente distintas del polinomio $p(x)$ entonces $r = u - 2k$ donde $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Demostración.

Se deja propuesta para el estudiante. En cambio se mostrará un par de ejmplos al respecto.

La propiedad 9 también se aplica para el caso de raíces negativas de $p(x)$ pués éstas son raíces positivas de $p(-x)$.

Ejemplo 6.

Sea $p(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 4x - 4$, solo tenemos un cambio de signo por tanto $r = 1 + 2k$ como k es un entero positivo o cero, entonces $k = 0$ y $p(x)$ tiene solo una raíz positiva, en tanto que

$p(-x) = -2x^5 + 2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 4$, tiene cuatro cambios de signo por tanto $r = 4 - 2k \Rightarrow 4,\ 2$ o 0 raíces negativas. Notemos que en éste caso fácilmente se tiene $p(x) = (x+1)(2x^4 - 7x^2 - 4)$ el segundo factor

$q(x) = 2x^4 - 7x^2 - 4$ tiene solo un cambio de signo como también $q(-x)$ entonces hay exáctamente 2 raíces negativas, por tanto 3 raíces reales.

Nota 5.

La regla de Descartes solo da respuestas exactas cuando éstas son cero o uno.

$9.9.$ Ecuaciones

Llamaremos una ecuación a $p(x) = 0$ donde $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos, hay que recalcar que no toda ecuación es de este tipo, es más general expresarlas como $u(x) = v(x)$ en que u y v son funciones racionales.

Una función racional la definimos como $f(x) = \dfrac{r(x)}{q(x)}$, donde r y q son polinomios con coeficientes complejos, note que el dominio de f son todos los complejos a excepción de las raíces de $q(x)$.

Aún más $u(x) = v(x)$ podemos expresarla como $\dfrac{r_1(x)}{q_1(x)} = \dfrac{r_2(x)}{q_2(x)}$ que tiene por soluciones las raíces x_0 del polinomio $r_1(x)q_2(x) = r_2(x)q_1(x)$ para las cuales

$q_1(x_0)$ y $q_2(x_0)$ no se anulan.

En general resolver una ecuación tal como $p(x) = 0$ es, encontrar aquellos complejos α tales que $p(\alpha) = 0$, lo cuál no siempre resulta simple.

9.10. Ejercicios Resueltos

1. Hallar la relación entre a y b para que $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + ax + b$ sea divisible por $(x - 3)$

Solución.

Por el teorema del resto se debe tener que $p(3) = 0 \Leftrightarrow 3a + b - 27 = 0$

2. Demostrar que $p(x) = 32\,x^{10} - 33\,x^5 + 1$ es divisible por $(x - 1)$.

Solución.

Por demostrar que $p(1) = 0$, en efecto $p(1) = 32 \cdot 1^{10} - 33 \cdot 1^5 + 1 = 0$

3. Qué número debe agregarse a $p(x) = x^3 + 2x^2$ para que sea divisible por $(x + 4)$.

Solución.

Sea k el número buscado, luego $p(x) = x^3 + 2x^2 + k$, entonces se debe tener que $p(-4) = 0 \Leftrightarrow k = 32$

4. Si $x + a$ es un factor común de $p(x) = x^2 + px + q$ y de $q(x) = x^2 + rx + s$, demostrar que $a(p - r) = q - s$

Demostración.

$(x + a)$ factor de $p(x) \Rightarrow p(-a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - pa + q = 0$ (1)

$(x + a)$ factor de $q(x) \Rightarrow q(-a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - ra + s = 0$ (2)

Restando (1) y (2) resulta $a(p - r) = q - s$.

5. Dividir $p(x) = 4x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2$ por $x + 1$

Solución.

Por división sintética $\quad 4 \quad -3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 2$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
-1 & & -4 & 7 & -2 & 2 & -2 \\
\hline
 & 4 & -7 & 2 & -2 & 2 & \underline{|\,0}
\end{array}$$

La división es exacta pués $r(x) = 0$ con lo que
$p(x) = (x + 1)(4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$

6. Determine a y b de modo que el resto de la división de $p(x)$ por : $x^2 - 1$ sea $2x + 1,$ donde

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + 6x^2 - 12x + 4$$

y luego resuelva la ecuación $p(x) = 2x + 1$

Solución.

Sea el resto $r(x) = 2x + 1,$ por el teorema del resto se debe tener:

$p(1) = r(1)$ y $p(-1) = r(-1)$ de donde se obtienen:

$$a + b - 5 = 0 \ \wedge \ a - b + 22 = 0$$

resolviendo $a = -9 \ \wedge \ b = 14$

Notemos que si $p(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow -9x^4 + 14x^3 + 6x^2 - 14x + 3 = 0$ admite las raíces $x = \pm 1 \Rightarrow -9x^2 + 4x - 3 = 0$ por tanto las otras raíces son:
$x = \frac{1}{9}\left(2 \pm \sqrt{23}\, i\right).$

7. Hallar k de modo que el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4kx + 4$ tenga una raíz $x = 2$ y luego encuentre las otras raíces.

Solución.

Por el teorema del resto se debe tener que $p(2) = 0 \Leftrightarrow 8k = -8 \Leftrightarrow k = -1$

Ahora, por división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -4 & 4 \\
2 & & 4 & 2 & -4 \\
\hline
 & 2 & 1 & -2 & \underline{|\,0}
\end{array}$$

de donde $2x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$

8. Dada la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + a = 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$ Determine a y b de modo que $x = 2 + i$ sea una raíz y luego resuelva la ecuación.

Solución.

Se debe tener $(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + a = 0 \Leftrightarrow$
$4a + 2b + 2 + (4a + b + 11)i = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + 2 = 0 \quad \wedge \quad 4a + b + 11 = 0$ de donde obtenemos $a = -5 \ \wedge \ b = 9$

Así,

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 9 & -5 \\
2+i & & 2+i & -7-i & 5 \\ \hline
 & 1 & -3+i & 2-i & \underline{|\,0} \\
2-i & & 2-i & -2+i & \\ \hline
 & 1 & -1 & \underline{|\,0} &
\end{array}$$

finalmente las raíces resultan: $2+i;\ 2-i$ y 1

9. Si $p(x) = x^3 + 3px + q$ admite un factor dela forma $(x-a)^2$, demostrar que $q^2 + 4\,p^3 = 0.$

Solución.

Por medio de la división sintética, dividiendo por $(x-a)$ dos veces resulta;

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 3p & q \\
a & & a & a^2 & a^3+3ap \\ \hline
 & 1 & a & a^2+3p & \underline{|\,a^3+3ap+q} \\
a & & a & 2\,a^2 & \\ \hline
 & 1 & 2a & \underline{|\,3a^2+3p} &
\end{array}$$

Para que el resto sea 0, necesariamente se debe tener que:

$$a^3 + 3ap + q = 0 \quad \wedge \quad 3a^2 + 3p = 0$$

de donde eliminando a se tiene $q^2 + 4\,p^3 = 0.$

10. Si el polinomio $p(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ admite el factor $(x-a)^3(x-b)$, demuestre que $p^2 + 12r = 0 \quad \wedge \quad 8p^3 + 27\,q^2 = 0$

Demostración.

Notemos que el resto de la división de $p(x)$, por $(x-a)^3(x-b)$ debe ser 0.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & p & q & r
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
a & & a & a^2 & a^3+ap & a^4+a^2p+aq \\
\hline
 & 1 & a & a^2+p & a^3+ap+q & \underline{|a^4+a^2p+aq+r} \\
a & & a & 2a^2 & 3a^3+ap & \\
\hline
 & 1 & 2a & 3a^2+p & \underline{|4a^3+2ap+q} & \\
a & & a & 3a^2 & & \\
\hline
 & 1 & 3a & \underline{|6a^2+p} & & \\
b & & b & & & \\
\hline
 & 1 & \underline{|3a+b} & & &
\end{array}
$$

por tanto:

$a^4+a^2p+aq+r=0 \ \wedge \ 4a^3+2ap+q=0 \ \wedge \ 6a^2+p=0 \ \wedge \ 3a+b=0$

de donde obtenemos; $a=\sqrt{-\frac{p}{6}}$, $p<0$ y remplazando en la segunda ecuación resulta $4\left(\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^3+2\sqrt{-\frac{p}{6}}\,p+q=0 \Rightarrow 8p^3+27\,q^2=0$

finalmente remplazando el valor de a y de q es términos de p, en la primera ecuación se logra $p^2+12r=0$.

11. Encontrar un polinomio de tercer grado que se anule para $x=1$ y para $x=-2$, y que tenga los valores 4 y 28 para $x=-1$ y para $x=2$ respectivamente.

Solución.

Aprovechando que el polinomio se anula para $x=1$ y $x=-2$ podemos expresarlo como $p(x)=(x-1)(x+2)(ax+b)$ por otra parte nos dicen que $p(-1)=4 \Leftrightarrow a-b=2 \qquad (1)$; $p(2)=28 \Leftrightarrow 2a+b=7 \qquad (2)$, resolviendo (1) y (2) se obtiene $a=3$ y $b=1$ así resulta $p(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

12. Demuestre que la condición para que los polinomios $p(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ y $q(x)=a'x^2+b'x+c',\ a'\neq 0$ puedan tener un factor común de primer grado es $(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$.

Demostración.

Si $(x-\alpha)$ es factor de $p(x)$ y de $q(x)$ entonces $p(\alpha)=0=q(\alpha)$ de aquí $a\alpha^2+b\alpha+c=0 \ \wedge \ a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$ de donde resolviendo para α y α^2

obtenemos $\alpha^2 = \dfrac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \ \wedge \ \alpha = -\dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b};\ ab' - a'b \neq 0$

elevando al cuadrado esta última e igualando con la primera resulta

$(ca' - c'a)^2 = (bc' - b'c)(ab' - a'b).$

13. Demuestre que existe un único polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ que pasa por los puntos $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_1)$ y $C(x_3, y_3)$ si $x_1 < x_2 < x_3$.

Demostración.

Se debe tener

$$\begin{aligned} x_1^2 a + x_1 b + c &= y_1 \qquad (1)\\ x_2^2 a + x_2 b + c &= y_2 \qquad (2)\\ x_3^2 a + x_3 b + c &= y_3 \qquad (3) \end{aligned}$$

Debemos mostrar que este sistema para a, b y c tiene única solución

Restando (1) y (2), $\left(x_2^2 - x_1^2\right)a + (x_2 - x_1)b = y_2 - y_1$

analogamente, $(x_3^2 - x_2^2)a + (x_3 - x_2)b = y_3 - y_2$

Como $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow x_2 - x_1 \neq 0 \ \wedge \ x_3 - x_2 \neq 0 \ \Rightarrow$

$$(x_2 + x_1)a + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ \wedge \ (x_3 + x_2)a + b = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

por último restando entre si estas ecuaciones se obtiene

$(x_1 - x_3)a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, como $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 - x_3 \neq 0$, así existe a y además es única, analogamente para asegurar para b y c.

14. Suponga que $p(x)$ se divide por $(x - a)(x - b)$ y que el resto es de primer grado, que se expresa por $A(x - a) + B(x - b),\ (a \neq b)$ Determine A y B.

Solución.

Supongamos que el cuociente sea $s(x)$, entonces

$p(x) = (x - a)(x - b)s(x) + A(x - a) + B(x - b)$

de aquí $p(a) = B(a - b) \Rightarrow B = \dfrac{p(a)}{a - b}$,

$$p(b) = A(b - a) \Rightarrow A = \frac{p(b)}{b - a}$$

15. Demostrar que si $p(x)$ se divide por $x^2 - a^2$, el resto es de la forma $Ax + B$,

donde $A = \frac{1}{2a}[p(a) - p(-a)]$; $B = \frac{1}{2}[p(a) + p(-a)]$

Demostración.

Como $p(x) = s(x)(x^2 - a^2) + Ax + B$, se debe tener que

$p(a) = 0 + Aa + B \qquad (1) \quad \wedge \quad p(-a) = 0 - Aa + B \qquad (2)$

sumando (1) y (2) se obtiene $B = \frac{1}{2}[p(a) + p(-a)]$

y restando $A = \frac{1}{2a}[p(a) - p(-a)]$

16. Dado el polinomio $p(x) = (a-1)\,x^n + bn\,x^{n-1} + x - 2$, $n \in \mathbb{N}$

a) Encontrar a y b de manera que $p(x)$ sea divisible por $x^2 - 3x + 2$.

b) Encontrados a y b resuelva la ecuación $p(x) = 0$, para $n = 5$.

Solución.

a) Notemos que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, luego

$p(1) = 0 \Leftrightarrow \qquad a + nb - 2 = 0 \qquad (1)$

$p(2) = 0 \Leftrightarrow 2^n a + n2^{n-1}b - 2^n = 0 \;\; (2)$

De (2) factorizando por $2^{n-1} \neq 0 \Rightarrow 2a + nb - 2 = 0$ que, junto a (1) para obtener $a = 0 \;\wedge\; b = \frac{2}{n}$; luego $p(x) = -x^n + 2\,x^{n-1} + x - 2$

b) Para $n = 5$ se tiene $p(x) = -x^5 + 2x^4 + x - 2$, como 1 y 2 son raíces

$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
1 & & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
2 & & -2 & -2 & -2 & -2 & \\
\hline
 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 &
\end{array}$$

De aquí que $p(x) = -(x-1)(x-2)(x^3 + x^2 + x + 1)$

$= -(x-1)(x-2)(x+1)(x^2+1)$

$= -(x-1)(x-2)(x+1)(x+i)(x-i)$

Así $p(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2,\; x_3 = -1, x_4 = i$ y $x_5 = -i$.

17. Resolver la ecuación $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ sabiendo que sus raíces están en progresión aritmética.

Solución.

Sean las raíces en $P.A.$; $a-d$, a, $a+d$ entonces:

$$(a-d)+a+(a+d) = -\frac{-24}{4} = 6 \qquad (1)$$

$$(a-d)a+a(a+d)+(a-d)(a+d) = \frac{23}{4} \qquad (2)$$

$$(a-d)a(a+d) = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \qquad (3)$$

De (1) obtenemos $a=2$ remplazando este valor en (3) resulta $d = \pm\frac{5}{2}$ con lo que las raíces son: $-\frac{1}{2}$, 2 y $\frac{9}{2}$.

18. Resolver la ecuación $3x^3-26x^2+52x-24=0$, si se sabe que sus raíces se encuentran en progresión geométrica.

Solución.

Sean las raíces en $P.G.$; $\frac{a}{r}$, a, ar entonces $\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar = 8 \Leftrightarrow a=2$, es decir una raíz es 2, las otras dos las obtenemos por división sintética, luego

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -26 & 52 & -24 \\ 2 & & 6 & -40 & 24 \\ \hline & 3 & -20 & 12 & \underline{|\,0} \end{array}$$

por tanto la ecuación queda $(x-2)(3x^2-20x+12)=0$ de aquí las raíces resultan: $\frac{2}{3}$, 2 y 6.

19. Encuentre la suma de los cuadrados y cubos de las raíces de la ecuación

$$x^3-p\,x^2+q\,x-r=0$$

Solución.

Sean a, b y c las raíces de la ecuación, entonces:

$$a+b+c=p \qquad (1)$$

$$ab+bc+ca=q \qquad (2)$$

$$a\,b\,c=r \qquad (3)$$

Elevando (1) al cuadrado se tiene $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=p^2$ de donde $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$

Para obtener la suma de los cubos, como a, b y c son las raíces de la ecuación deben satisfacerla esto es:

$$a^3 - p\,a^2 + q\,a - r = 0$$
$$b^3 - p\,b^2 + q\,b - r = 0$$
$$c^3 - p\,c^2 + q\,c - r = 0$$

de donde sumando miembro a miembro estas tres ecuaciones se tiene

$$a^3 + b^3 + c^3 - p\,(a^2 + b^2 + c^2) + q(a + b + c) - 3r = 0 \;\Rightarrow$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = p\,(p^2 - 2q) - q\,p + 3r = p^3 - 3p\,q + 3r$$

20. Resolver la ecuación $4x^3 + 20x^2 - 23x + 6 = 0$ si dos de sus raíces son iguales.

Solución.

Sean α, α y β las raíces, entonces

$$2\alpha + \beta = -5 \qquad (1)$$
$$\alpha^2 + 2\,\alpha\beta = -\tfrac{23}{4} \qquad (2)$$
$$\alpha^2\beta = -\tfrac{3}{2} \qquad (3)$$

De (1) y (2) resultan $(\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -6\,) \vee (\alpha = -\frac{23}{6} \Rightarrow \beta = \frac{8}{3})$ luego las raíces son: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$ y -6 el otro caso no dá solución.

21. Resolver la ecuación $6x^4 - 29x^3 + 40x^2 - 7x - 12 = 0$ si el producto de dos de sus raíces es 2.

Solución.

Sean α, β, γ y δ las raíces, entonces

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{29}{6} \qquad (1)$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{40}{6} \qquad (2)$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \frac{7}{6} \qquad (3)$$
$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = -2 \qquad (4)$$

Supongamos que $\alpha\beta = 2$ entonces de (4) obtenemos $\gamma\delta = -1$, esto en (2) y se llega a $-\alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = \dfrac{7}{6}$ ahora sumando a (1) miembro a miembro se tiene que $\gamma + \delta = 2$ de ésta última ecuación junto a $\gamma\delta = -1$ finalmente resultan: $\gamma = 1 + \sqrt{2} \;\wedge\; \delta = 1 - \sqrt{2}$ analogamente $\alpha = \dfrac{4}{3} \;\wedge\; \beta = \dfrac{3}{2}$.

22. Demostrar que si la ecuación $x^3 + 3\,qx + r = 0$ tiene dos raíces iguales, entonces

$r^2+4q^3=0.$

Demostración.

Sean α,α y β las raíces, entonces
$$\begin{aligned} 2\alpha+\beta &= 0 && (1)\\ \alpha^2+2\,\alpha\beta &= 3q && (2)\\ \alpha^2\beta &= -r && (3) \end{aligned}$$

Ahora, de (1) y (2) se obtiene $-a^2=q \Leftrightarrow q^3=-a^6 \quad (4)$

analogamente de (1) y (3), $2a^3=r \Leftrightarrow r^2=4a^6$ finalmente en (4) y se tiene $r^2+4q^3=0.$

23. Si dos raíces de la ecuación $x^3+px^2+qx+r=0$ son iguales pero de signos contrarios. Demostrar que $pq=r.$

Demostración.

Sean las raíces: $\alpha,\beta,-\beta;$ luego
$$\begin{aligned} \alpha+\beta-\beta &= -p && (1)\\ \alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2 &= q && (2)\\ \alpha\beta(-\beta) &= -r && (3) \end{aligned}$$

Simplemente (1) y (2) remplazando en (3) resulta $pq=r.$

24. Determinar las raíces de $p(x)=2x^4+4x^3+3x^2+ax+b;\ a,b\in\mathbb{Q}$ si se sabe que una de las raíces es $1+i.$

Solución.

Se debe tener que $p(1+i)=0$ de donde igualando la parte real y la parte imaginaria a 0, resultan $a=-14$ y $b=30$ y luego por división sintética se tiene:

$$\begin{array}{r|ccccc} & 2 & 4 & 3 & -14 & 30\\ 1+i & & 2+2i & 4+8i & -1+15i & -30\\ \hline & 2 & 6+2i & 7+8i & -15+15i & \underline{|\ 0}\\ 1-i & & 2-2i & 8-8i & 15-15i & \\ \hline & 2 & 8 & 15 & \underline{|\ 0} & \end{array}$$

Por tanto $p(x)=(x^2-2x+2)(2x^2+8x+15)$ las otras raíces se obtienen de $2x^2+8x+15=0 \Rightarrow x=-2\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}\,i.$

25. Si la ecuación $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$ tiene una raíz compleja de módulo $\sqrt{13}$, resolver la ecuación.

Solución.

Sean las raíces de la ecuación $a + bi$, $a - bi$ y x_3, con $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ se debe cumplir que $(a + bi)(a - bi)\,x_3 = 65 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)\,x_3 = 65 \Leftrightarrow 13\,x_3 = 65$ de donde $x_3 = 5$ luego efectuando la división por $(x - 5)$ se tiene

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 33 & -65 \\ 5 & & 5 & -20 & 65 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & \underline{|\,0} \end{array}$$

de esto resulta $x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 + 3i,\ x_2 = 2 - 3i$

26. Resolver la ecuación $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0$ si una de sus raíces es $-1 + i$.

Solución.

Como $-1 + i$ es una raíz, también lo es $-1 - i$ y la ecuación admite como factor a $[x - (-1 + i)][x - (-1 - i)] = x^2 + 2x + 2$ efectuando la división por este factor se tiene,

$$\begin{array}{l} \quad x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 \div x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x - 1 \\ \underline{-x^4 - 2x^3 - 2x^2} \\ \qquad\qquad 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 \\ \qquad \underline{-2x^3 - 4x^2 - 4x} \\ \qquad\qquad\qquad -x^2 - 2x - 2 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{\ \ x^2 + 2x + 2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

luego la ecuación se puede expresar por $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$ de donde se obtienen las otras dos raíces, que son: $x = -1 \pm \sqrt{2}$

27. Resolver la ecuación

$$x^6 + 2x^3 + 2 = 0$$

Solución.

Sea $z = x^3 \Rightarrow z^2 + 2z + 2 = 0$ de aquí $z = -1 + i \ \vee\ z = -1 - i$ de donde se sigue $x^3 = -1 + i \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1 + i}$ pasando a su forma trigonométrica $x = \sqrt[6]{2}\, cis\, \dfrac{2k\pi + 3\frac{\pi}{4}}{3},\ k = 0, 1, 2$

analogamente para $x^3 = -1 - i$

$$x = \sqrt[6]{2}\, cis\, \frac{2k\pi + 5\frac{\pi}{4}}{3},\ k = 0, 1, 2$$

28. Resolver la ecuación $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 30x + 18 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es compleja y de módulo $\sqrt{2}$, y otra de ellas es de multiplicidad 2.

Solución.

Sea $a + bi$ la raíz compleja, entonces $a^2 + b^2 = 2$, por otra parte las raíces deben ser $a + bi$, $a - bi$, α, α. Luego se verifican las siguientes relaciones:

$$a + bi + a - bi + \alpha + \alpha = 8 \qquad (1)$$

$$(a + bi)(a - bi)\,\alpha\,\alpha = 18 \qquad (2)$$

las otras dos relaciones no son necesarias, de $(1) \Rightarrow a + \alpha = 4$

de $(2) \Rightarrow (a^2 + b^2)\,\alpha^2 = 2\ \alpha^2 = 18 \Leftrightarrow \alpha = \pm 3$

Ahora si $\alpha = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow 1 + i,\ 1 - i,\ 3$ y 3 que son las raíces.

Si $\alpha = -3 \Rightarrow a = 7$ que no aporta más soluciones.

29. Resolver la ecuación $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es de la forma bi, con $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Solución.

La raíz bi debe satisfacer la ecuación, de donde se obtiene:

$(b^2 - 9)(b^2 + 4) = 0 \ \wedge\ b(b^2 - 9) = 0$ como ambas relaciones deben cumplirse a la vez, se tiene solo $b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 3$, dividiendo la ecuación por $(x - 3i)(x + 3i) = x^2 + 9$ se obtiene $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, finalmente las raíces resultan ser: $3i,\ -3i,\ 4$ y -1.

30. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ encuentre el valor de: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$ y de $\dfrac{1}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{c^2a^2}$

Solución.

De inmediato se tienen:

$$a + b + c = p \qquad (1)$$

$$ab + bc + ca = q \qquad (2)$$

$$abc = r \qquad (3)$$

Elevando al cuadrado (2) y remplazando en ésta expresión (1) y (3) se obtiene:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2rp \quad (4)$$

dividiendo (4) por $a^2b^2c^2 = r^2$ se recibe

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = (\frac{q}{r})^2 - 2(\frac{p}{r})$$

Analogamente de (1) : $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$, dividiendo tambien por $a^2b^2c^2 = r^2$ finalmente se llega a $\dfrac{1}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{c^2a^2} = (\dfrac{p}{r})^2 - 2(\dfrac{q}{r^2})$

31. Determinar el parámetro k en la ecuación $x^3 - 7x + k = 0$ de modo que una de sus raíces sea el doble de la otra.

Solución.

Sean las raíces $\alpha, \beta, 2\beta$ entonces se cumplen:

$$\alpha + \beta + 2\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\alpha\beta + 2\alpha\beta + 2\beta\beta = -7 \qquad (2)$$

$$2\,\alpha\,\beta\,\beta = -k \qquad (3)$$

De (1) se sigue $\alpha = -3\beta$, en (2) resulta $\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \mp 3$ de donde $k = \pm 6$. Luego habrán 2 ecuaciones:

$x^3 - 7x + 6 = 0$ y $x^3 - 7x - 6 = 0$ cuyas raíces son respectivamente: $-3, 1$ y 2 y $-2, -1, 3$.

32. Sean α, β y γ las raíces de $x^3 + px + q = 0$; $q \neq 0$, formar la ecuación cuyas raíces sean: $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$; $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ y $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\gamma}$.

Solución.

Se deben tener:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -q \qquad (3)$$

Sea $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ la ecuación buscada, note que se supuso 1 el coeficiente de x^3 pués debe ser de tercer grado, así:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = -A$$

(4)

$$(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma})=B \qquad (5)$$

$$(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma})=-C$$

(6)

De (4) se tiene: $2\,(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})=2\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2p}{-q}=-A\Rightarrow \underline{A=\frac{2p}{q}}$

De (5) ocupando (1) y (2) se llega a:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{p^2}{q^2}=B\Rightarrow \underline{B=\frac{p^2}{q^2}}$$

Note que:

$p^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

De (6) : $\frac{-\gamma}{\alpha\beta}\cdot\frac{-\alpha}{\beta\gamma}\cdot\frac{-\beta}{\alpha\gamma}=-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{q}=-C\Rightarrow \underline{C=\frac{1}{q}}$

Finalmente se llega a:

$$x^3+\frac{2p}{q}x^2+\frac{p^2}{q^2}x+\frac{1}{q}=0\Leftrightarrow q^2x^3+2pq\,x+p^2x+q=0.$$

33. Sea $p(x)=x^4+12x^3+ax^2+bx+c$ determine a,b y c de modo que $p(x)$ admita a $x=1$ como una raíz de multiplicidad 3.

Solución.

Debe tenerse que

$$p(x)=x^4+12x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^3(Ax+B)$$
$$=Ax^4+(-3A+B)x^3+(3A-3B)x^2+(-A+3B)x-B$$

de donde igualando coeficientes, se tiene:

$A=1,\ -3A+B=12,\ 3A-3B=a,\ -A+3B=b$ y $-B=c$

entonces de aquí: $A=1,\ B=15,\ a=-42,\ b=44$ y $c=-15$

34. Dado el polinomio $p(x)=3x^5+7x^4+x^3-10x^2-14x-8$

a) ¿Cuántas raíces positivas y cuántas negativas tiene $p(x)$?.

b) Determine las raíces de $p(x)$ si se sabe que tiene una raíz racional negativa y que las raíces complejas de la ecuación $x^3=1$ tambien son raíces de $p(x)$.

Solución.

a) Por la regla de Descartes como hay solo un cambio de signo en $p(x)$, la fórmula nos dice $r^{+} = 1 - 2k$ esto es válido solo para $k = 0 \Rightarrow$ una raíz positiva Ahora si $p(-x) = -3x^5 + 7x^4 - x^3 - 10x^2 + 14x - 8$, cuatro cambios de signo $\Rightarrow r^{-} = 4 - 2k,\ k = 0, 1, 2$ o sea hay 4 ó 2 ó 0 raíces negativas.

b) Por lo que nos afirman en ésta parte es decir que hay una raíz negativa y dos complejas, necesariamente debe haber otra raíz negativa más.

Las raíces complejas de $x^3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$ se obtienen de $x^2 + x + 1 = 0$ entonces dividiendo $p(x)$ por $x^2 + x + 1$ se recibe $s(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x - 8$. Ahora atendiendo a que hay una raíz racional negativa, sea ésta $\frac{p}{q}$; (p los divisores de 8 y q los divisores de 3), así $\frac{p}{q}$ se debe elegir entre $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}\}$ y por el teorema del resto o división sintética se llega a que dicha raíz resulta ser $-\dfrac{4}{3}$, pués $p\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$. Por último $s(x) = (3x+4)(x^2-2)$ con lo que las raíces de $p(x)$ resultan ser: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\ -\frac{4}{3},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}$.

Note es más inmediato factorizar $s(x)$ para obtener igual resultado.

9.11. Ejercicios Propuestos

1. Efectúe las divisiones de:

   i) $4x^6 + 21x^5 - 26x^3 + 27x + 10$ por $(x+5)$

   ii) $7x^7 - 2x^5 - 4x^2 - 5$ por $(x-1)$

   iii) $3x^5 + 2x^4 - 10x^2 + 6x - 17$ por $x^2 + x + 1$

Respuesta.

i) $s(x) = 4x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x + 2;\ r(x) = 0$

ii) $s(x) = 7x^6 + 7x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + x + 1;\ r(x) = -4$

iii) $s(x) = 3x^3 - x^2 - 2x - 7;\ r(x) = 15x - 10$

2. Encontrar los valores de k para que al dividir $x^4 - k^2x + 3 - k$ por $x - 3$ resulte como resto 4.

Respuesta.

$k = 5 \;\; \vee \;\; k = -\frac{16}{3}$

3. En el polinomio $p(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$ el coeficiente de x^2 es cero y en el polinomio $q(x) = (x-a)(x+b)(x+c)$ el coeficiente de x es cero. Además el coeficiente de x en $p(x)$ es igual al coeficiente de x^2 en $q(x)$. Demuestre que a solo puede tomar los valores 0 y 1.

4. Encontrar los valores de a y b para que el polinomio

$$p(x) = ax^4 + bx^3 - 12x^2 + 21x - 5$$

sea divisible por $2x^2 + 3x + 1$.

Respuesta.

$a = -220$ y $b = -258$

5. Determine los valores de a y b para que el resto de la división de

$p(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 10$ por $x^2 + x - 2$ sea:

i) $4x + 5$ ii) 5.

Respuesta.

i) $a = -\dfrac{7}{2}$ y $b = -\dfrac{1}{2}$ ii) $a = -\dfrac{7}{2}$ y $b = -\dfrac{9}{2}$

6. Por la división sintética hallar el cuociente y el resto, de la división de

$p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 15$ por $q(x) = x^2 + 2x - 3$

Respuesta.

$s(x) = x^2 - 4$ y $r(x) = 3$

7. Hallar el divisor $q(x)$ sabiendo que la división de $p(x) = x^4 + 6x^2 + px + k$ por $q(x)$ resulta $x^2 + 2x - 3$, y es exacta, indicando el valor de p y k adecuados.

Respuesta.

$q(x) = x^2 - 2x + 13$; $p = 32$ y $k = -39$.

8. Demostrar que la condición para que los polinomios $p(x) = ax^3 + bx + c$ y $q(x) = a'x^3 + b'x + c'$ tengan un factor común de la forma $(x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ es

$(bc' - cb')(ab' - a'b)^2 = (a'c - ac')^3$

9. Si un polinomio $p(x)$ es dividido por $x^2 - 3x + 2$, demostrar que:

i) El resto es $x[p(2) - p(1)] + [2p(1) - p(2)]$

ii) El término independiente de x en el cuociente es $\frac{1}{2}[p(0) - 2p(1) + p(2)]$

10. Dado un polinomio $p(x)$ y como el resto de la división por $(x - a)$ es $p(a)$.

Si el cuociente al dividirlo por $(x-a)$ es $g(x)$ y al dividirlo por $(x-b)$ es $h(x)$, demostrar que $g(b)=h(a)=\dfrac{p(a)-p(b)}{a-b}$

11. Determinar m para que los polinomios

$$p(x)=x^3+mx-6 \text{ y } q(x)=x^2+mx-2$$

tengan una raíz en común.

Respuesta.

m satisface la ecuación $(m+1)(m^2+7)=0.$

12. Sea la ecuación $2x^3-x^2-7x+k=0$, determine k para que la suma de dos de sus raíces sea igual a $1.$

Respuesta.

$k=\,-3$

13. Determinar k de manera que las raíces de la ecuación

$$x^3+2x^2-7x+k=0$$

satisfagan la relación $x_1^2=x_2^2+x_3^2$

Respuesta.

$k=\,-24 \;\vee\; k=\,-12$

14. Determine la condición para que las raíces de la ecuación

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\, a\neq 0$$

estén en progresión geométrica. Verifique para la ecuación y luego resuélvala.

$$8x^3-42x^2+63x-27\;=0$$

Respuesta.

$b^3d-c^3a=0$

15. Determinar k y p de manera que las raíces de la ecuación

$$x^4-4x^3-36x^2+kx+p=0$$

estén en $P.A.$ y luego resuelva la ecuación.

Respuesta.

$k=66,\ p=105;$ las raíces son: $-5,\ -1, 3$ y $7.$

16. Si las raíces de la ecuación $x^3+3px^2+3qx+r=0$ están en progresión armónica, demuestre que $2q^3=r(3pq-r)$

17. Resolver la ecuación $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ si una raíz es $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

Respuesta.

Las raíces son: $-\dfrac{2}{3}, 3, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

18. Si α, β, γ son las raíces de la ecuación $x^3 + qx - r = 0$. Encuentre el valor de:

i) $(\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2$

ii) $(\beta + \gamma)^{-1} + (\gamma + \alpha)^{-1} + (\alpha + \beta)^{-1}$

Respuesta.

i) $-6q$ ii) $\dfrac{q}{r}$

19. Encuentre la suma de los cuadrados y la de los cubos, de las raíces dela ecuación

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0$$

Respuesta.

$-2q$ y $-3r$.

20. Resolver la ecuación $x^4 - 6x^3 + 24x - 16 = 0$ si se sabe que admite a -2 como una de sus raíces y las otras tres, están en progresión geométrica.

Respuesta.

Las raíces son: $-2,\ 3 - \sqrt{5},\ 2,\ 3 + \sqrt{5}$.

21. Si el producto de dos de las raíces de la ecuación $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ es igual al producto de las otras dos, pruebe que $r^2 = p^2 s$.

22. Si α, β, γ son las raíces de la ecuación $x^3 + px + r = 0$, encuentre la ecuación cuyas raíces sean: $\alpha + \beta - 2\gamma,\ \alpha + \gamma - 2\beta, \beta + \gamma - 2\alpha$.

Respuesta.

$x^3 + 9px - 27r = 0$

23. Si el polinomio $p(x) = x^4 + px^3 + qx^2 - 18x - 12$ se divide por $(x+1)(x+3)$ el resto es $2x + 3$, determine p y q.

Respuesta.

$p = 4,\ q = -2$.

24. Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación $x^3 + px + q = 0$, si una de sus raíces es la suma de las inversas de las otras dos.

Respuesta.

$p + q^2 + 1 = 0$

25. Resolver $x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ sabiendo que i es una de sus raíces.

Respuesta.

Las raíces son: i y $-i$ cada una de multiplicidad dos , $-1,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

26. Sean k y p los restos de las divisiones de un polinomio $p(x)$ por $(x-a)$ y $(x-b)$. Demostrar que el resto de la división de $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$, es

$$k\,\frac{x-b}{a-b} + p\,\frac{x-a}{b-a}\ ,\ (a \neq b)$$

27. Determinar m de modo que la ecuación $x^3 - 5x + m = 0$ tenga dos raíces α y β tales que $\alpha + \beta = 2\alpha\beta$. Hallado m, resolver la ecuación.

Respuesta.

$m = \frac{25}{8}$, las raíces son: $\frac{1}{4}\left(5 + \sqrt{5}\right),\ \frac{1}{4}\left(5 - \sqrt{5}\right),\ -\frac{5}{2}$

28. Sea $p(x) = 2x^5 - 19x^4 + 55x^3 - 49x^2 - 7x + 10$

i) Sin calcular las raíces determine el número máximo de raíces positivas y negativas de $p(x)$.

ii) Determine las posibles raíces racionales de $p(x)$.

iii) Factorice $p(x)$ en productos de polinomios reales.

iv) Encuentre todas las raíces de $p(x)$.

Respuesta.

i) Máximo 4 raíces positivas, y exáctamente una raíz negativa.

ii) $\frac{1}{2}, 2$ y 5.

iii) $p(x) = (2x-1)(x-2)(x-5)\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$.

iv) $\frac{1}{2}, 2, 5, 1 + \sqrt{2}\,,\ 1 - \sqrt{2}$.

29. El polinomio $p(x) = x^3 + a^2x^2 + (3a - b)x + a - b$ debe cumplir que $p(0) = 0$ y que dividido por $(x-1)$ deje resto 4. Encuentre a y b, y las raíces del polinomio.

Respuesta.

$a = b = -3$, las raíces son: $0,\ -\frac{1}{2}\left(9 - \sqrt{105}\right),\ -\frac{1}{2}\left(9 + \sqrt{105}\right)$.