Capítulo 8

Números Complejos

8.1. El cuerpo de los complejos

Con los números reales en el horizonte vamos a presentar un cuerpo que se acostumbra a denotar por $\mathbb{C}$ y llamar números complejos.

Definición 1.

El cuerpo $\mathbb{C}$ está formado por todos los pares ordenados de números reales, en éste cuerpo se definen las operaciones siguientes:

Suma $\quad (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Multiplicación $\quad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Igualdad

Como acabamos de definir los números complejos como pares ordenados se tiene que:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \ \wedge \ b=d$$

Nota 1.

Con estas definiciones es posible verificar los **axiomas de cuerpo**, cuya tarea dejaremos al lector.

Nótese que : $\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}$

El neutro de la suma es el $(0,0)$.

El inverso de la suma es $(-a,\,-b)$.

El neutro de la multiplicación es $(1,0)$.

El inverso de la multiplicación es $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Nota 2.

Las propiedades o teoremas de todo cuerpo, como las que se expusieron para el caso de los números reales en el capítulo anterior, también los cumple $\mathbb{C}$.

Notación

Al inverso multiplicativo para cada elemento $z = (a, b)$ de $\mathbb{C}$, lo denotaremos por:

$$z^{-1} = [(a, b)]^{-1}$$

Definición 2.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, definiremos: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Definición 3.

Dado $z = (a, b)$ se llama parte real de z a la primera componente del par (a, b) y parte imaginaria a la segunda componente, las que se acostumbran a denotar por:

$$Re\, z = a, \qquad Im\, z = b$$

Los complejos de la forma $(a, 0)$ se acostumbran a llamar reales puros y simplemente se denotan por a, es decir $(a, 0) = a$. A su vez los de la forma $(0, b)$ se llaman imaginarios puros y se denotan por bi.

Note que si $b = 1 \Rightarrow \boldsymbol{i = (0, 1)}$.
También que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

8.2. Representación gráfica. Complejo Conjugado.

Como se han definido los complejos como pares ordenados, es posible representarlos gráficamente en el plano cartesiano, por tanto el complejo $z = (a, b)$ está representado por el par ordenado (a, b). fig. 1

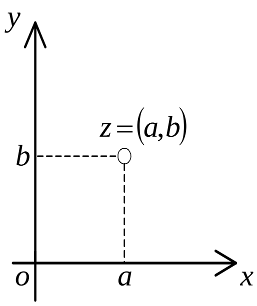

fig. 1

Definición 4.

Sea $z=(a,b)$ definimos el producto de un real por un complejo mediante:

$$k\,z=k(a,b)=(ka,kb)$$

Propiedades 1.

Sean $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ y $k,p\in\mathbb{R}$ entonces

1. $k\,z_1\in\mathbb{C}$
2. $k(pz_1)=(kp)z_1$
3. $(k+p)z_1=kz_1+pz_1$
4. $k(z_1+z_2)=kz_1+kz_2$
5. $1\,z=z,\ 1\in\mathbb{R}$

Demostración.

Todas son inmediatas por tanto se dejan propuestas.

Forma canónica.

Notemos que para todo complejo $z=(x,y)$ se tiene:

$z=(x,y)=x\,(1,0)+y\,(0,1)=x\,1+yi=x+yi$, lo que se justifica por la definición y notación establecida con anterioridad.

Por tanto se llama forma canónica de un complejo z, a:

$$z=x+y\,i,\ \ x,y\in\mathbb{R}$$

Con respecto a las operaciones definidas anteriormente, se tienen:

1. $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$
2. $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$ se usó $i^2=\,-1$
3. $k\,z_1=k\,(a+bi)=ka+kbi,\ \forall\,k\in\mathbb{R}.$

Los inversos de la suma y multiplicación de $a+bi$ son:

$$-a-bi \quad \text{y} \quad \frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

Complejo conjugado.

Definición 5.

Sea $z=a+bi$ se llama complejo conjugado de z, simbólicamente $\overline{z}$ y se define por $\overline{z}=a-bi$

Propiedades 2.

Sean $z,w\in\mathbb{C}$ y $k\in\mathbb{R}$

1. $\overline{\overline{z}}=z$
2. $\overline{kz}=k\,\overline{z}$
3. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
4. $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$
5. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Demostración.

Son todas sencillas, solo demostraremos dos de ellas.

3. Sean $z=a+bi \;\wedge\; w=c+di$ luego

$$\overline{z+w}=\overline{a+c+(b+d)i}=a+c-(b+d)i=a-bi+c-di=\overline{z}+\overline{w}$$

4. $\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{ac-bd+(ad+bc)i}=ac-bd-(ad+bc)i$

$$=ac-adi-bci-bd=(a-bi)(c-di)=\overline{z}\,\overline{w}$$

8.3. Módulo.

Sea $z=a+bi$ se define el módulo del complejo z, simbólicamente $|z|$, al número real

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Note que si el complejo es **real puro** su módulo coincide con su **valor absoluto**.

Propiedades 3.

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i$
2. $|kz| = |k||z|, \forall\, k \in \mathbb{R}$
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
4. $|z|^2 = z\,\overline{z}$
5. $|zw| = |z||w|$
6. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|},\ w \neq 0 + 0i$
7. $|\,Re\, z\,| \leq |z|; \quad |\,Im\, z\,| \leq |z|$
8. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Demostración.

Solo demostraremos algunas de ellas, dejando el resto para su ejercicio.

4. $z\,\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

6. $$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{a + bi}{c + di}\right| = \frac{1}{c^2 + d^2}|ac + bd + (bc - ad)i| \qquad ;\ c, d \neq 0$$
$$= \frac{1}{c^2 + d^2}\sqrt{(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2} = \frac{1}{c^2 + d^2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{|z|}{|w|}$$

8. $$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\,\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}$$
$$= |z|^2 + 2(Re\, z\, Re\, w + Im\, z\, Im\, w) + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2\, Re\,(z\overline{w}) + |w|^2,$$ pero $Re\,(z\overline{w}) \leq |z\,\overline{w}| = |z||\overline{w}|$
$$\leq |z|^2 + 2\,|z||\overline{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

luego: $\quad |z + w| \leq |z| + |w|$

Propiedad 4.

$\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado.

Demostración.

Lo demostraremos por contradicción, supongamos existe $\mathbb{C}^+$ que cumpla los axiomas de cuerpo ordenado.

Como $i \neq 0$ entonces $i \in \mathbb{C}^+ \ \vee\ (-i) \in \mathbb{C}^+$

Supóngase que $i \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow 1 \notin \mathbb{C}^+$ (*)

pero $(-1)(-1) \in \mathbb{C}^+ \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{C}^+$ lo que se contradice con (*), luego $i \notin \mathbb{C}^+$

en forma análoga se prueba que $(-i) \notin \mathbb{C}^+$.

Por tanto $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado y solo pueden usarse desigualdades entre partes reales o partes imaginarias o módulos de complejos, pero no entre estos.

8.4. Complejos y vectores.

Como se dijo anteriormente un complejo queda representado por un par ordenado (a, b) en el plano cartesiano, pero tambien se acostumbra a representarlo no por un punto sino por el vector que va desde el origen hasta el punto (a, b), introduciendo con ello la representatividad de complejos por medio de vectores geométricos con todo el potencial que implican tratarlos como tales.(fig. 2)

Es más, estos complejos representados así se consideran vectores deslizantes es por eso que cada complejo $z = a + bi$ no tiene solamente un vector que lo representa.(fig. 3)

En el plano cartesiano al eje X se acostumbra a llamar eje real, eje en el que se ubica la parte real a del complejo $a + bi$, y a su vez al eje Y se llama eje imaginario y en el que se ubica la parte imaginaria b de $a + bi$.

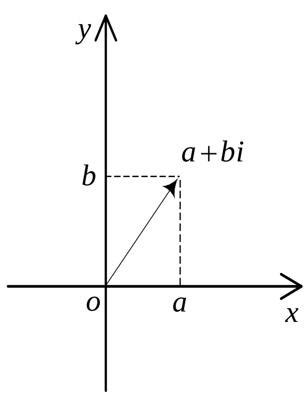

fig. 2

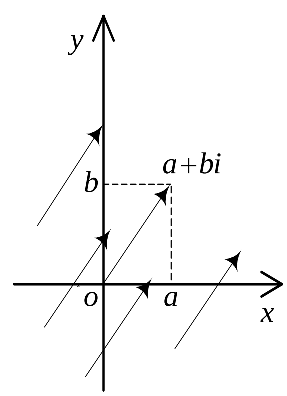

fig. 3

Suma y ponderación.

La típica suma y ponderación (fig. 4) definida entre los vectores geométricos, se define naturalmente para los complejos considerados como vectores, con todas las consecuencias que llevan estas definiciones .

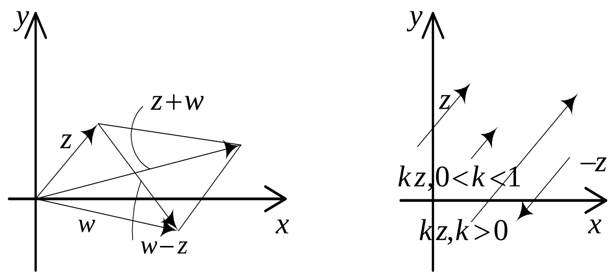

fig.4

Consecuencias tales como por ejemplo: la ponderación de un número real por un complejo kz, $k \in \mathbb{R}$ representa el alargamiento o acortamiento con o sin cambio de sentido del complejo según sean los valores del real k.

Con respecto al módulo del complejo z coincide con la magnitud del vector z.

La distancia entre los complejos z y w está dada por $|z-w|$

8.5. Forma Trigonométrica.

Sea θ el ángulo orientado, medido desde el eje real al vector z en sentido antihorario, de la fig. 5 para cualquier θ se tiene:

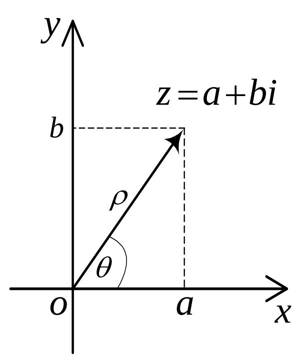

fig. 5

$a = |z|\, cos\,\theta\,,\; b = |z|\, sen\,\theta \;\Rightarrow\; z = a + bi = |z|(\,cos\,\theta + i\, sen\,\theta\,)$

a ésta última expresión se llama forma trigonométrica del complejo z, qué también se suele denotar por

$$z = \rho\, cis\,\theta\,;\text{ donde } \rho = |z|,\; cis\,\theta = cos\,\theta + i\, sen\,\theta$$

El ángulo θ se acostumbra a llamar "argumento de z" y su valor etá comprendido entre 0 y 2π.

También de la figura se obtiene la fórmula no menos importante, $tg\,\theta = \dfrac{b}{a}$ que nos permite calcular el argumento θ, note que la ubicación del argumento según el cuadrante es importante, así se tiene:

Si $a > 0 \;\wedge\; b > 0 \Rightarrow \theta \in$ I cuadrante

Si $a < 0 \;\wedge\; b > 0 \Rightarrow \theta \in$ II cuadrante

Si $a < 0 \;\wedge\; b < 0 \Rightarrow \theta \in$ III cuadrante

Si $a > 0 \;\wedge\; b < 0 \Rightarrow \theta \in$ IV cuadrante

Si $a = 0 \;\wedge\; b > 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$, Si $a = 0 \;\wedge\; b < 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2} \;\vee\; \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Si $a > 0 \;\wedge\; b = 0 \Rightarrow \theta = 0$, Si $a < 0 \;\wedge\; b = 0 \Rightarrow \theta = \pi$

Multiplicación y Cuociente

Dados $z_1 = \rho_1 cis\,\alpha$ y $z_2 = \rho_2 cis\,\alpha\,;\; \rho_1 = |z_1|, \rho_2 = |z_2|$ entonces

1) $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\, cis\,(\alpha + \beta)$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\, cis\,(\alpha - \beta)$

Demostración.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2\,(cos\,\alpha + i\, sen\,\alpha)(cos\,\beta + i\, sen\,\beta) \\ &= \rho_1\rho_2\,[cos\,\alpha\, cos\,\beta - sen\,\alpha\, sen\,\beta\, + (sen\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sen\,\beta)i] \\ &= \rho_1\rho_2\,[cos\,(\alpha+\beta) + i\, sen\,(\alpha+\beta)] = \rho_1\rho_2\, cis\,(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(cos\,\alpha + i\, sen\,\alpha)}{\rho_2(cos\,\beta + i\, sen\,\beta)} = \frac{\rho_1(cos\,\alpha + i\, sen\,\alpha)(cos\,\beta - i\, sen\,\beta)}{\rho_2(cos^2\beta - i^2\, sen^2\beta)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[cos\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta\, + (sen\,\alpha\, cos\,\beta - cos\,\alpha\, sen\,\beta)i] \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos\,(\alpha-\beta) + i\, sen\,(\alpha-\beta)] = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, cis\,(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Potenciación.

Fórmula de Moivre.

Dado $z = \rho\,[cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]$ entonces $z^n = \rho^n[cos\,n\alpha + i\,sen\,n\alpha]$, $n \in \mathbb{N}$

Para $\rho = 1$ obtenemos la fórmula de **Moivre** es decir

$$[cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]^n = cos\,n\alpha + i\,sen\,n\alpha$$

Demostración.

Por inducción,

i) Para $n = 1$, se tiene $z = \rho\,[cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]$ lo que es verdadero

ii) Sea válido para n, o sea: $z^n = \rho^n[cos\,n\alpha + i\,sen\,n\alpha]$ H.I.

Por demostrar para $n+1$, o sea qué

$$z^{n+1} = \rho^{n+1}[cos\,(n+1)\alpha + i\,sen\,(n+1)\alpha] \quad \text{T.}$$

En efecto, $z^{n+1} = z^n z = \rho^n[cos\,n\alpha + i\,sen\,n\alpha]\,\rho\,[cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]$

$= \rho^{n+1}[(cos\,n\alpha\,cos\,\alpha - sen\,n\alpha\,sen\,\alpha) + (sen\,n\alpha\,cos\,\alpha + cos\,n\alpha\,sen\,\alpha)i]$

$= \rho^{n+1}[cos\,(n\alpha + \alpha) + sen(n\alpha + \alpha)]$

$= \rho^{n+1}[cos\,(n+1)\alpha + i\,sen\,(n+1)\alpha]$

Observación.

Si n es negativo también se cumple la fórmula de Moivre, pués

Sean $z = cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha$, $n = -m$ con $m \in \mathbb{N}$

$$z^n = [cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]^n = [cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]^{-m}$$

$$z^n = \frac{1}{[cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha]^m} = \frac{1}{cos\,m\alpha + i\,sen\,m\alpha}$$

Radicación.

Dado $z = \rho\,(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$, $\rho = |z|$

entonces $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}[cos\,\frac{2k\pi+\alpha}{n} + i\,sen\,\frac{2k\pi+\alpha}{n}]$, $k = 0, 1, 2 \ldots . (n-1)$

Demostración.

$\sqrt[n]{z}$ es de suponer que es un complejo de la forma $r(cos\,\theta + isen\,\theta)$ por tanto

$\sqrt[n]{z} = (\rho\,[cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha])^{\frac{1}{n}} = r(cos\,\theta + isen\,\theta)$ de donde obtenemos

$\rho\,(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha) = r^n(cos\,n\theta + isen\,n\theta)$ ahora, por igualdad de complejos

$$\rho \cos \alpha = r^n cos\, n\theta \qquad (1)$$

$$\rho\, sen\, \alpha = r^n sen\, n\theta \qquad (2)$$

elevando al cuadrado y sumando se obtiene $\rho^2 = r^{2n} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ en (1) resulta

$cos\, n\theta = cos\, \alpha \ \Rightarrow \ n\theta = \alpha + 2k\pi \ \Leftrightarrow \ \theta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$ notemos que estos valores de θ verifican la ecuación (2) en consecuencia se tiene

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}[cos\, \tfrac{2k\pi+\alpha}{n} + i\, sen\ \tfrac{2k\pi+\alpha}{n}], \ \ k = 0, 1, 2 \ldots . (n-1)$$

Notación de Euler.

La siguiente notación de un número complejo tiene su justificación en los desarrollos en serie, tópico que excede las intenciones de éste texto, sin embargo daremos una definición con el fin de poder ocuparla en los ejercicios que procedan.

Definición.

El complejo $z = \rho\,[cos\, \theta + i\, sen\, \theta]$ se puede expresar como

$$z = \rho\, e^{i\theta} \text{ donde } \ e^{i\theta} = cos\, \theta + i\, sen\, \theta$$

"e" es la base de los logaritmos naturales.

Propiedad 5.

1. $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta}$
3. $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
4. $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}, \ k \in \mathbb{Z}$
5. $\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ik\theta}, \ \ k \in \mathbb{Z}$

Demostración

Todas son sencillas de demostrar, solo mostraremos una de ellas el resto quedan para su ejercitación.

1. $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (cos\theta_1 + i\, sen\, \theta_1)(cos\, \theta_2 + i\, sen\, \theta_2)$

$$= [cos\, \theta_1\, cos\, \theta_2 - sen\, \theta_1\, sen\, \theta_2\ + (sen\, \theta_1\, cos\, \theta_2 + cos\, \theta_1\, sen\, \theta_2)i]$$

$$= [cos\, (\theta_1 + \theta_2) + i\, sen\, (\theta_1 + \theta_2)] = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

8.6. Ejercicios Resueltos

1. Calcular:

a) $(3+7i)(-5+2i)$

b) $\dfrac{5+4i}{5+6i}-\dfrac{1}{61}i(3-2i)$

Solución.

a) $(3+7i)(-5+2i)=-15+6i-35i+14i^2=-29-29i=-29(1+i)$

b) $$\frac{5+4i}{5+6i}-\frac{1}{61}i(3-2i)=\frac{(5+4i)(5-6i)}{25+36}-\frac{2}{61}-\frac{3}{61}i$$
$$=\tfrac{1}{61}(49-10i)-\tfrac{2}{61}-\tfrac{3}{61}i=\tfrac{1}{61}(47-13i)$$

2. Expresar en la forma $a+bi$

a) $z=\dfrac{(3+5i)(2-i)^3}{(4i-1)}$

b) $w=\dfrac{i}{1+i}-\dfrac{2}{i(i-1)}$

Solución.

a) $$z=\frac{(3+5i)(2-i)^3}{(4i-1)}=-\frac{1}{17}(3+5i)\,(2-i)^3(4i+1)$$
$$=-\frac{1}{17}(3+5i)(2-11i)(4i+1)=-(9+13i)$$

b)
$$w=\frac{i}{1+i}-\frac{2}{i(i-1)}=\frac{i}{1+i}+\frac{2}{1+i}=\frac{i+2}{1+i}=\frac{(i+2)(1-i)}{1-i^2}=\frac{1}{2}(3-i)$$

3. Calcular el módulo de:

a) $z=\dfrac{(2-3i)^4(1-i)^3}{(5+i)}$

b) $w=\dfrac{i-r}{1+2ir}-\dfrac{3}{4}i;\ \ r\in\mathbb{R}$

Solución.

a) $|z| = \dfrac{|2-3i|^4|1-i|^3}{|5+i|} = \dfrac{(\sqrt{13}\,)^4(\sqrt{2}\,)^3}{\sqrt{26}} = \dfrac{13^2 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{13}} = 26\sqrt{13}$

b) $|w| = \left|\dfrac{i-r}{1+2ir} - \dfrac{3}{4}i\right|$

$$= \left|\frac{4i-4r-3i-6r\,i^2}{4(1+2ir)}\right| = \frac{1}{4}\frac{|2r+i|}{|1+2ir|} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{4r^2+1}}{\sqrt{4r^2+1}} = \frac{1}{4}$$

4. Demostrar que

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

e interpretar geométricamente esta igualdad.

Demostración.

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w})$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + z\,\overline{w} + w\,\overline{z} + |z|^2 + |w|^2 - z\,\overline{w} - w\,\overline{z}$$

$$= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

Nótese de la fig. 6, que el resultado anterior indica que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma de los cuadrados de sus lados.

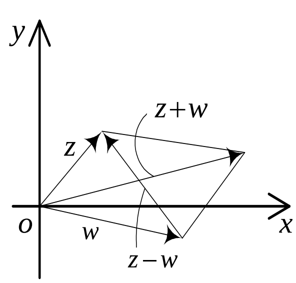

fig. 6

5. Expresar en la forma $a+bi$ el complejo $z = \sqrt{-7+24i}$

Solución.

Sea $\sqrt{-7+24i} = x + y\,i \Leftrightarrow -7+24i = x^2 - y^2 + 2xyi$ de aquí se obtienen

$x^2 - y^2 = -7 \quad \wedge \ 2xy = 24$ de donde resolviendo resultan $x = \pm 3$ e $y = \pm 4$ luego $z = \pm(3 + 4i)$

$\alpha_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

6. Determinar un complejo z tal que: $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |1 - z|$

Solución.

Sea $z = x + yi$, de la igualdad dada se obtienen:

$$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

$$|z| = |1 - z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - x)^2 + y^2 \ (2)$$

De (2), $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, luego $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

7. Demostrar que si $z + \dfrac{1}{z}$ es real, entonces $Im(z) = 0 \ \vee \ |z| = 1$

Demostración.

Sea $z = x + yi$, entonces $z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x+yi} = x + yi + \frac{1}{x^2+y^2}(x - yi)$

$z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + (y - \frac{y}{x^2+y^2})i$, para que este complejo sea un real puro se debetener $y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee 1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0,$

Si $y = 0 \Rightarrow Im(z) = 0$ y si $1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow |z| = 1$

8. Demostrar que $\forall \ z, w \in \mathbb{C}$:

a) $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$

b) $Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$

c) $Re(zw) = Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)$

d) $Im(zw) = Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w)$

Demostración.

Sean $z = x + yi, \ w = a + bi$

a) $Re(z + w) = Re[x + a + (y + b)i] = x + a = Re(z) + Re(w)$

b) Se demuestra como a).

c) $Re(zw) = Re[xa - yb + (ya + xb)i] = xa - yb$

$$= Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)$$

d) $Im(zw) = xb + ya = Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w)$

9. Demostrar que

$$Re(\frac{z}{z+w}) + Re(\frac{w}{z+w}) = 1$$

Demostración.

Por la parte a) del problema anterior se tiene:

$$Re(\frac{z}{z+w}) + Re(\frac{w}{z+w}) = Re(\frac{z}{z+w} + \frac{w}{z+w}) = Re(1) = 1$$

10. Si $|z| = 1,\ z, w \in \mathbb{C};$ demuestre que

$$\left|\frac{z+w}{\overline{z}w+1}\right| = 1$$

Demostración.

Recordemos: $|z|^2 = z\,\overline{z},\ |z| = |\overline{z}|$ además $z\,\overline{z} = 1^2 = 1,$ entonces

$$\left|\frac{z+w}{\overline{z}w+1}\right| = \left|\frac{z+w}{\overline{z}w+z\,\overline{z}}\right| = \left|\frac{z+w}{\overline{z}\,(w+z)}\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|\overline{z}|} = 1$$

11. Sean z_1, z_2, z_3 complejos cada uno de módulo 1, tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 0,$

probar que $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 0$

Prueba.

$z_1\,\overline{z_1} = 1 \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{1}{\overline{z_1}},$ análogamente para z_2 y z_3 entonces $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_2}} + \frac{1}{\overline{z_3}} = 0 \Leftrightarrow \overline{(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3})} = \overline{0} = 0$$

12. Determinar el lugar geométrico de un complejo $z = x + yi$ que verifica la condición $|(1+i)z - (1+3i)| \leq 1$

Solución.

$|(1+i)z-(1+3i)| \le 1 \;\Leftrightarrow |(1+i)(x+yi)-(1+3i)| \le 1 \;\Leftrightarrow$

$|(x-y-1)+(x+y-3)i| \le 1 \;\Leftrightarrow \sqrt{(x-y-1)^2+(x+y-3)^2} \le 1 \;\Leftrightarrow$

$2x^2+2y^2-8x-4y+10 \le 1 \;\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y+\dfrac{9}{2} \le 0 \;\Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-1)^2-5+\dfrac{9}{2} \le 0 \;\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 \le \dfrac{1}{2},$ así el lugar geométrico del complejo z es un círculo de centro $(2,1)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$

13. Determinar la curva que debe recorrer el complejo z para que $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ sea imaginario puro

Solución.

Sea $z=x+yi$, entonces:

$w=\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{x+1+yi}{x-1+yi}=\dfrac{x^2+y^2-1-2yi}{(x-1)^2+y^2},$ para que este complejo sea imaginario puro se debe tener que $x^2+y^2-1=0,$ luego z debe recorrer una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

14. Sea $z_1=a+bi$ un complejo fijo y $z_2=x+yi$ un complejo que recorre la recta $y=mx+n.$ Determinar la curva que recorre el complejo $z=z_1+z_2.$

Solución.

Sea $z=u+vi=z_1+z_2=a+bi+x+yi=a+bi+x+(mx+n)i \;\Leftrightarrow$

$u+vi=a+x+(b+mx+n)i \;\Leftrightarrow\; u=a+x \;\wedge\; v=b+mx+n$

eliminando x entre estas dos ecuaciones, se tiene $v=m\,u+(b+n-ma),$

ecuación que nos indica que z recorre una recta paralela a la recta $y=mx+n$

15. Sea $z=x+yi,$ demuestre que $|z|\sqrt{2} \ge |x|+|y|$

Demostración.

Como $(|x|+|y|)^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow |x|^2+|y|^2 \ge 2\,|xy| \Leftrightarrow 2(|x|^2+|y|^2) \ge (|x|+|y|)^2$

de donde extrayendo raíz cuadrada se tiene $|z|\sqrt{2} \ge |x|+|y|.$

Obsérveseque la igualdad se verifica para $y = \pm x$.

16. Aprovechando las raíces cúbicas de la unidad, factorice $x^3 + a^3$, $a \in \mathbb{R}$; en tres factores de primer grado.

Solución.

$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - xa + a^2) = (x+a)(x+aw)(x+aw^2)$ pués

$(x+aw)(x+aw^2) = x^2 + a(w+w^2) + a^2w^3$, pero $w^3 = 1$ y como

$w^2 + w + 1 = 0 \Leftrightarrow w + w^2 = -1.$

17. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, probar que:

a) $(1+w^2)^4 = w$

b) $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = 4$

c) $(2+2w+5w^2)^6 = 729$

Prueba.

Por ser w una raíz cúbica compleja de 1, satisface: $w^3 = 1 \ \wedge w^2 + w + 1 = 0$

a) $(1+w^2)^4 = (-w)^4 = w^3 w = w$

b) $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = (-2w)(-2w^2) = 4\,w^3 = 4$

c) $(2+2w+5w^2)^6 = [2(1+w) + 5w^2]^6 = (-2w^2 + 5w^2)^6 = (3w^2)^6$

$$= 3^6(w^3)^2 = 729$$

18. Demostrar que si la ecuación $z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$, tiene una raíz real se verifica $d^2 - abd + b^2c = 0$

Solución.

Sea r la raíz real entonces,

$r^2 + (a+bi)r + c + di = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + c = 0 \wedge br + d = 0$, eliminando r

entre las dos últimas ecuaciones se obtiene $d^2 - abd + b^2c = 0$

19. Hallar la forma trigonométrica de los siguientes complejos:

a) $\sqrt{3}+i$ b) $-\sqrt{3}+i$

c) $17\,i$ d) 13

e) $3-4\,i$ f) $-2i$

Solución.

a) $\rho=\sqrt{4}=2;\ tg\,\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \theta\in I\ \Rightarrow\ \ \theta=\dfrac{\pi}{6}$; luego $z=2\,cis\,\dfrac{\pi}{6}=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $\rho=2;\ tg\,\theta=\frac{1}{-\sqrt{3}},\ \theta\in II\ \Rightarrow\ \ \theta=\frac{5\pi}{6}$; luego $z=2\,cis\,\frac{5\pi}{6}=2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

c) $\rho=17;\ a=0\ \wedge\ b=17\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{2}$; luego $z=17\,cis\,\frac{\pi}{2}=17\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

d) $\rho=13;\ a=13\ \wedge\ b=0\ \Rightarrow\ \theta=0$; luego $z=13\,cis\,0=13\,e^{i0}$

e) $\rho=5;\ a=3\ \wedge\ b=\ -4\ \Rightarrow\ \theta=Arc\,tg(-\dfrac{4}{3}),\theta\in IV\ ;\ z=5\,cis\,\theta.$

f) $\rho=2;\ a=0\ \wedge\ b=\ -2\ \Rightarrow\ \theta=\dfrac{3\pi}{2}$; luego $z=2\,cis\,\dfrac{3\pi}{2}=2\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$

20. Calcular:

a) $\left(3\,cis\,\dfrac{\pi}{6}\right)\left(2\,cis\,\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ b) $\dfrac{3\,cis\,\frac{5\pi}{6}}{6\,cis\,\frac{\pi}{6}}$

Solución.

a) $\left(3\,cis\,\dfrac{\pi}{6}\right)\left(2\,cis\,\dfrac{\pi}{2}\right)^2=\left(3\,cis\,\dfrac{\pi}{6}\right)(4\,cis\,\pi)=12\,cis\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)=12\,cis\,\dfrac{7\pi}{6}$

b) $\dfrac{3\,cis\,\frac{5\pi}{6}}{6\,cis\,\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}\,cis\left(\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\,cis\,\dfrac{2\pi}{3}$

21. Hallar

a) $\sqrt[3]{-8i}$ b) $\sqrt[5]{1}$ c) $\sqrt[5]{-32}$

Solución.

a) Sea $z=\ -8i\ \Rightarrow\rho=8,\ \theta=\dfrac{3\pi}{2}$ luego $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{8}\,cis\,\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k=0,1,2$

Con lo que, resultan: $z_1=2\,cis\,\frac{\pi}{2},\ \ z_2=2\,cis\,\frac{7\pi}{6}$ y $z_3=2\,cis\,\frac{11\pi}{6}$

b) Sea $z=1 \Rightarrow \rho=1,\ \theta=0$ luego $\sqrt[5]{z}=cis\,\frac{2k\pi}{5},\ k=0,1,2,3,4$ de donde se obtienen:

$$z_1=cis\,0,\ z_2=cis\,\tfrac{2\pi}{5},\ \ z_3=cis\,\tfrac{4\pi}{5},\ z_4=cis\,\tfrac{6\pi}{5}\ \text{y}\ \ z=cis\,\tfrac{8\pi}{5}$$

c) Sea $z=-32 \Rightarrow \rho=32,\ \theta=\pi$ luego $\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32}cis\,\frac{2k\pi+\pi}{5},\ k=0,1,2,3,4$ de donde se obtienen:

$$z_1=2cis\tfrac{\pi}{5},\ z_2=2cis\,\tfrac{3\pi}{5},\ \ z_3=2cis\,\pi,\ z_4=2cis\,\tfrac{7\pi}{5}\ \text{y}\ \ z=2cis\,\tfrac{9\pi}{5}$$

22. Sea $A=(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2})^n+(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2})^n$, probar que A es igual a 2 si n es múltiplo de 3 y es igual a (-1) si es cualquier otro número.

Prueba

Por el teorema de Moivre, sean:

$z=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow \rho=1;\ tg\,\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1},\ \theta\in II\ \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$; luego $z^n=\ cis\frac{2n\pi}{3}$

$w=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow \rho=1;\ tg\,\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1},\ \theta\in III \Rightarrow \theta=\frac{4\pi}{3}$; luego $w^n=\ cis\,\frac{4n\pi}{3}$

de donde $A=z^n+w^n=\ cis\,\dfrac{2n\pi}{3}+cis\,\dfrac{4n\pi}{3}=2\,cos\,\dfrac{2n\pi}{3}$.

Si $n=3k\,,k\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow A=2\,cos\,2k\pi=2$,

Si n es cualquier otro número, puede ser: $n=3k+1\ \vee\ n=3k+2, k\in\mathbb{Z}^+$;

$$A=z^{3k+1}+w^{3k+1}$$
$$=cos\,(2k\pi+\frac{2\pi}{3})+i\,sen\,(2k\pi+\frac{2\pi}{3})+cos\,(4k\pi+\frac{4\pi}{3})+i\,sen\,(4k\pi+\frac{4\pi}{3})$$
$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$$

Análogamente, si $n=3k+2$ también se recibe $A=-1$

23. Resolver : $$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^x+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^x=\sqrt{2}$$

Solución.

De inmediato $(1+i)=\sqrt{2}\,cis\,\dfrac{\pi}{4}\quad\wedge\quad(1-i)=\sqrt{2}\,cis\,(-\dfrac{\pi}{4})$

luego queda $\left(cis\,\frac{\pi}{4}\right)^x+\left(cis\,(-\frac{\pi}{4})\right)^x=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow$

$$cos(\frac{\pi}{4}x)+i\,sen(\frac{\pi}{4}x)+cos(-\frac{\pi}{4}x)+i\,sen(-\frac{\pi}{4}x)=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow$$

$$2\,cos(\frac{\pi}{4}x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x = cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 8k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

24. Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\,cos\,\alpha.$ Demostrar que $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\,cos\,n\alpha$

Demostración.

Como $z + \frac{1}{z} = 2\,cos\,\alpha \Leftrightarrow z^2 - 2\,cos\,\alpha\ z + 1 = 0,$ resolviendo esta ecuación obtenemos $z = cos\,\alpha \pm i\,sen\,\alpha,$

luego $z^n = cos\,n\alpha \pm i\,sen\,n\alpha \ \wedge\ \dfrac{1}{z^n} = z^{-n} = cos\,n\alpha \mp i\,sen\,n\alpha$

de donde finalmente $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\,cos\,n\alpha$

25. Si $p \wedge q$ son las raíces de $z^2 - 2\,z + 2 = 0,$ demostrar que:

$\dfrac{1}{p-q}[\,(x+p)^n - (x+q)^n] = sen\,n\phi\,cosec^{\,n}\phi,$ donde $cotg\,\phi = x + 1.$

Demostración.

Resolviendo $z^2 - 2\,z + 2 = 0$ obtenemos $p = 1 + i,\ q = 1 - i;$
por otra parte $x = cotg\,\phi - 1$ así resulta

$$\frac{1}{p-q}[\,(x+p)^n - (x+q)^n] = \frac{1}{2i}\,[(cotg\,\phi + i)^n - (cotg\,\phi - i)^n]$$

$$= \frac{1}{2i}\,[(\frac{cos\,\phi\ +\ isen\,\phi}{sen\,\phi})^n - (\frac{cos\,\phi\ -\ isen\,\phi}{sen\,\phi})^n]$$

$$= \frac{1}{2i\,sen^n\phi}\,[(cos\,n\phi + i\,sen\,n\phi) - (cos\,n\phi + i\,sen\,n\phi)]$$

$$= sen\,n\phi\,cosec^{\,n}\phi$$

26. Si n es un entero positivo , demostrar que:

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\,\frac{n}{2}+1} cos\,\frac{n\pi}{4}$$

Demostración.

Como $(1+i) = \sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4} \ \wedge\ (1-i) = \sqrt{2}\,cis\,(-\frac{\pi}{4})$ luego

$$(1+i)^n+(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}[\,cos\,\frac{n\pi}{4}+i\,sen\frac{n\pi}{4}+cos\,(-\frac{n\pi}{4})+i\,sen(-\frac{n\pi}{4})]$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}2\,cos\,\frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}+1}cos\,\frac{n\pi}{4}$$

27. Demostrar que:

$$sen\,7\alpha = 7sen\,\alpha - 56\,sen^3\alpha + 112\,sen^5\alpha - 64\,sen^7\alpha$$

Demostración.

Como $(cis\,\alpha)^7 = cis\,7\alpha = cos\,7\alpha + i\,sen7\alpha$ $\quad(1),$ y por otra parte,

$(cis\,\alpha)^7 = \binom{7}{0}cos^7\alpha + \binom{7}{1}cos^6\alpha\,sen\,\alpha\,i + \binom{7}{2}cos^5\alpha\,sen^2\alpha\,i^2 +$

$+\binom{7}{3}cos^4\alpha\,sen^3\alpha\,i^3 + \binom{7}{4}cos^3\alpha\,sen^4\alpha\,i^4 + \binom{7}{5}cos^2\alpha\,sen^5\,\alpha\,i^5 +$

$+\binom{7}{6}cos\alpha\,sen^6\alpha\,i^6 + \binom{7}{7}\,sen^7\alpha\,i^7$

Por (1) igualando partes imaginarias entre si, en este caso obtenemos

$sen\,7\alpha = \binom{7}{1}cos^6\alpha\,sen\,\alpha - \binom{7}{3}cos^4\alpha\,sen^3\alpha + \binom{7}{5}cos^2\alpha\,sen^5\,\alpha - \binom{7}{7}\,sen^7\alpha$

simplificando esta expresión y recordando que $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ se recibe

$sen\,7\alpha = 7sen\,\alpha - 56\,sen^3\alpha + 112\,sen^5\alpha - 64\,sen^7\alpha$

28. Encontrar la parte real, la parte imaginaria y el módulo de

$$z = \frac{1\,+\,cos\phi\,+\,i\,sen\,\phi}{1+\,cos\,\theta\,+\,i\,sen\,\theta}$$

Solución.

Ocupando las fórmulas $1+cos\,\alpha = 2\,cos^2\frac{\alpha}{2}\ \wedge\ sen\,\alpha = 2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}$

resulta: $z = \dfrac{2\,cos^2\frac{\phi}{2}+i2\,sen\,\frac{\phi}{2}\,cos\,\frac{\phi}{2}}{2\,cos^2\frac{\theta}{2}+i2\,sen\,\frac{\theta}{2}\,cos\,\frac{\theta}{2}} = \dfrac{cos\,\frac{\phi}{2}}{cos\,\frac{\theta}{2}}\,\dfrac{(cos\,\frac{\phi}{2}+isen\,\frac{\phi}{2})}{(cos\,\frac{\theta}{2}+isen\,\frac{\theta}{2})}$

$$= \frac{cos\,\frac{\phi}{2}}{cos\,\frac{\theta}{2}}\,\frac{cis\,\frac{\phi}{2}}{cis\,\frac{\theta}{2}}\,\frac{cis(-\frac{\theta}{2})}{cis(-\frac{\theta}{2})} = \frac{cos\,\frac{\phi}{2}}{cos\,\frac{\theta}{2}}\,cis\,\frac{\phi-\theta}{2},\ \text{luego}$$

$|z| = \dfrac{cos\,\frac{\phi}{2}}{cos\,\frac{\theta}{2}},\quad Re\,z = \dfrac{cos\,\frac{\phi}{2}}{cos\,\frac{\theta}{2}}\,cos\,\dfrac{\phi-\theta}{2}$ y $Im\,z = \dfrac{cos\,\frac{\phi}{2}}{cos\,\frac{\theta}{2}}\,sen\,\dfrac{\phi-\theta}{2}$

29. Dado $\quad a_n + i\,b_n = (\dfrac{1+\,i\sqrt{3}}{2})^n$

Demuestre que $a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Demostración.

$a_n + i\,b_n = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^n = (cis\,\frac{\pi}{3})^n = cis\,\frac{n\pi}{3} \Leftrightarrow a_n = cos\,\frac{n\pi}{3} \wedge b_n = sen\frac{n\pi}{3}$

por tanto $a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1} = cos\,\dfrac{(n-1)\pi}{3}\,sen\dfrac{n\pi}{3} - cos\,\dfrac{n\pi}{3}\,sen\,\dfrac{(n-1)\pi}{3}$

$$= sen[\,\frac{n\pi}{3} - \frac{(n-1)\pi}{3}] = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

30. Expresar en la forma $a + bi$, la suma

$$S = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{1}{(1+i)^{28}}$$

Solución.

Observe que los términos de la suma forman una $P.G.$, así:

$$S = \frac{(1+i)^{-29} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = 1 + [\frac{1}{(1+i)^{28}} - 1]\,i \;(1)$$

Ahora, $(1+i)^{28} = (\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4})^{28} = 2^{14}cis\,7\pi = -2^{14}$, luego en (1)

$S = 1 + [-2^{-14} - 1]\,i = 1 - [2^{-14} + 1]\,i$

31. Expresar $\dfrac{3}{2 + cos\,\theta + i\,sen\,\theta}$ en la forma $a + bi$ y probar que $|z|^2 = 4\,Re\,z - 3$

Solución.

$$\frac{3}{2 + cos\,\theta + i\,sen\,\theta}\;\frac{2 + cos\,\theta - i\,sen\,\theta}{2 + cos\,\theta - i\,sen\,\theta} = \frac{6 + 3\,cos\,\theta}{5 + 4\,cos\,\theta} - \frac{3\,sen\,\theta}{5 + 4\,cos\,\theta}i$$

que es de la forma $a + bi$, ahora

$$|z|^2 = (\frac{6 + 3\,cos\,\theta}{5 + 4\,cos\,\theta})^2 + (-\frac{3\,sen\,\theta}{5 + 4\,cos\,\theta})^2 = \frac{9}{5 + 4\,cos\,\theta} \qquad (1)$$

por otra parte

$$4\,Re\,z - 3 = 4\,(\frac{6 + 3\,cos\,\theta}{5 + 4\,cos\,\theta}) - 3 = \frac{9}{5 + 4\,cos\,\theta} \qquad (2)$$

finalmente por (1) y (2) se tiene: $|z|^2 = 4\,Re\,z - 3$

32. Pruebe que $(x+1)^n - x^n - 1$ es divisible por $x^2 + x + 1$ si y solo si $n \in \mathbb{N}$, impar no múltiplo de 3.

Prueba.

Sea $p(x) = (x+1)^n - x^n - 1$, las raíces de $x^2 + x + 1$ deben satisfacer a $p(x)$ o sea $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ así

$p(x_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1$, ocupando la forma trigonométrica

$p(x_1) = \left(cos\,\frac{n\pi}{3} + i\,sen\,\frac{n\pi}{3}\right) - \left(cos\,\frac{2n\pi}{3} + i\,sen\,\frac{2n\pi}{3}\right) - 1$

$p(x_1) = (cos\,\frac{n\pi}{3} - cos\,\frac{2n\pi}{3} - 1) + (sen\,\frac{n\pi}{3} - sen\,\frac{2n\pi}{3})\,i$

Sea $n = 3k,\ n = 3k+1$ y $n = 3k+2$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, para $n = 3k$ se tiene

$p(x_1) = cos\,k\pi - cos\,2k\pi - 1 + (sen\,k\pi - sen\ 2k\pi)\,i$

$p(x_1) = (-1)^k - 1 - 1 \neq 0$, luego debe ser $n \neq 3k$.

Sea $n = 3k+1$

$p(x_1) = cos(\,k\pi + \frac{\pi}{3}) - cos\,(2k\pi + \frac{2\pi}{3}) - 1 + [sen\,(\,k\pi + \frac{\pi}{3}) - sen(2k\pi + \frac{2\pi}{3})]i$

$p(x_1) = (-1)^k cos\,\frac{\pi}{3} - cos\,\frac{2\pi}{3} - 1 + [(-1)^k sen\,\frac{\pi}{3} - sen\,\frac{2\pi}{3}]\,i$

Si k par $\Rightarrow n$ impar no múltiplo de 3, queda

$p(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Análogamente resulta para $n = 3k+2$, como también para la raíz x_2.

33. Demostrar que uniendo los complejos z y w con el origen se forma un ángulo recto si y solo si

$$\frac{z}{w} \text{ es imaginario puro } \vee \ \overline{z}\,w + z\,\overline{w} = 0$$

Demostración.(fig. 7)

$(\Rightarrow)$ Sea $\phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\pi}{2},\ \ z = \rho_1\,cis\,\phi_1 \ \wedge\ w = \rho_2\,cis\,\phi_2$

$\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\,cis\,(\phi_1 - \phi_2)$, como $\phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\,i$ (imaginario puro)

O bien,

$z = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,i\ w \Leftrightarrow \overline{z} = -\frac{\rho_1}{\rho_2}\,i\ \overline{w}$ luego $\overline{z}\,w + z\,\overline{w} = -\frac{\rho_1}{\rho_2}\,i\ \overline{w}\,w + \frac{\rho_1}{\rho_2}\,i\ w\overline{w} = 0$

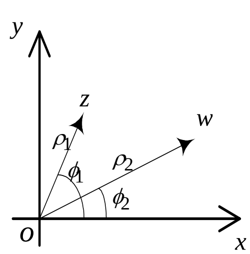

fig. 7

$(\Leftarrow)$ Por hipótesis sean $\dfrac{z}{w} = b\,i \;\vee\; \overline{z}\,w + z\,\overline{w} = 0$, por definición

$\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\,cis\,(\phi_1 - \phi_2) = b\,i \Rightarrow \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\,cos\,(\phi_1 - \phi_2) = 0 \Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, también observe que: $\overline{z}\,w + z\,\overline{w} = 0 \Leftrightarrow 2\,\rho_1\rho_2\,cos\,(\phi_1 - \phi_2) = 0 \Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$.

34. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, probar que los puntos

$$z_1 = 1 - w, \;\; z_2 = w - w^2, \;\; z_3 = w^2 - 1$$

son los vértices de un triángulo equilátero

Prueba.

Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad entonces $w = cis\,\frac{2\pi}{3}$, luego

$z_2 = w - w^2 = (1 - w)w = z_1 cis\,\frac{2\pi}{3}$

$z_3 = w^2 - 1 = w^2 - w^3 = (w - w^2)w = z_2 cis\,\frac{2\pi}{3}$

Note que z_1, z_2 y z_3 tienen el mismo módulo que es 3 y que z_2 es z_1 rotado en $\frac{2\pi}{3}$ y z_3 es z_2 rotado en $\frac{2\pi}{3}$, por tanto z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero

35. Sea α una raíz quinta compleja de la unidad y sea $x_1 = \alpha - \alpha^4 \;\wedge\; x_2 = \alpha^2 - \alpha^3$ Calcular $x_1^2 + x_2^2 \;\wedge\; x_1^2\,x_2^2$. Dedúzcase de ello que x_1 y x_2 son raíces de una ecuación de cuarto grado con coeficientes enteros.

Solución.

$\alpha^5 = 1 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$ pero $\alpha \neq 1 \Rightarrow$

$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ ahora $x_1^2 = \alpha^2 - 2\,\alpha^5 + \alpha^8 = \alpha^2 + \alpha^3 - 2$ y también $x_2^2 = \alpha^4 + \alpha - 2$, de donde $x_1^2 + x_2^2 = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 4 = -1 - 4 = -5$ y $x_1^2\,x_2^2 = 5$

Por otra parte, si $az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \;\wedge\; z_1 + z_2 = \frac{c}{a}$ si $z = x^2$ entonces la ecuación buscada resulta ser $x^4 + 5x^2 + 5 = 0$.

36. Probar que el producto de las n raíces de la ecuación $x^n = a$ es $(-1)^{n+1}a,\, a > 0$

Prueba.

$$x = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\,cis\,\frac{2k\pi}{n} = x_k; \;\; k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\ldots, n - 1.$$

el producto de estas raíces será:

$$\sqrt[n]{a}\, cis\, 0 \cdot \sqrt[n]{a}\, cis\, \frac{2\,\pi}{n} \cdot \sqrt[n]{a}\, cis\, \frac{4\pi}{n} \cdot \cdot \cdot \sqrt[n]{a}\, cis\, \frac{2(n-1)\pi}{n} = a\, cis\,(\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k}{n})$$

$$a\,(cis\,\pi)^{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k}{n}} = a(-1)^{\frac{2}{n}\frac{(n-1)n}{2}} = a(-1)^{n-1} = a(-1)^{n+1}$$

37. Calcular la suma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, sen(\alpha + k\beta)$$

Solución.

Sea $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, cos(\alpha + k\beta)$

$$C_n + i\, S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, [cos(\alpha + k\beta) + i\, sen(\alpha + k\beta)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, e^{i(\alpha + k\beta)}$$

$$= e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, e^{ik\beta} = e^{i\alpha} \big(1 + e^{i\beta}\big)^n \quad (1)$$

Por otra parte

$$\big(1 + e^{i\beta}\big)^n = (1 + cos\,\beta + i\, sen\,\beta)^n = \big(2\, cos^2 \tfrac{\beta}{2} + i\, 2 sen\, \tfrac{\beta}{2} cos\, \tfrac{\beta}{2}\big)^n$$

$$= 2^n cos^n \tfrac{\beta}{2}\, \big(cos\, \tfrac{\beta}{2} + i\, sen\, \tfrac{\beta}{2}\big)^n = 2^n cos^n \tfrac{\beta}{2}\, e^{in\, \frac{\beta}{2}} \;\; (2)$$

Ahora, remplazando (2) en (1) se tiene

$$C_n + i\, S_n = 2^n cos^n \tfrac{\beta}{2}\, e^{i(\alpha + n\, \frac{\beta}{2})} = 2^n cos^n \tfrac{\beta}{2}\, [cos\big(\alpha + n\tfrac{\beta}{2}\big) + i\, sen\big(\alpha + n\tfrac{\beta}{2}\big)]$$

luego, $\quad S_n = 2^n cos^n \tfrac{\beta}{2}\, sen\big(\alpha + n\tfrac{\beta}{2}\big)$

8.7. Ejercicios Propuestos

1. Exprese en la forma $a + bi$, los complejos siguientes:

a) $(4+3i)^2$	b) $\dfrac{1}{5+3i}$
c) $\dfrac{3+2i}{3-2i}$	d) $\dfrac{2+36i}{6+8i} + \dfrac{7-26i}{3-4i}$
e) $[\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}]^4$	f) $\sqrt{4ab + 2i(a^2 - b^2)}$

Respuesta.

a) $7+24i$ b) $\dfrac{5}{34}-\dfrac{3}{34}i$ c) $\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}i$ d) 8 e) -1

f) $\pm[a+b+(a-b)i]$

2. Resolver para z y w complejos el sistema

$$\begin{aligned}(1+i)\,z \qquad\quad -i\,w &= 2+i\\ (2+i)\,z+(2-i)\,w &= 2\,i\end{aligned}$$

Respuesta.

$z=\dfrac{1}{13}(6-9i),\;\; w=\dfrac{1}{13}(-16+11i)$

3. Encontrar x e y reales tales que:

$$\frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy}=1+i$$

Respuesta.

$x=0.3,\; y=0.9$

4. Simplifique las expresiones siguientes:

a) $(a+bi)^2+\,(a-bi)^2$

b) $(1+ai)^4+(1-ai)^4$

c) $\dfrac{a+bi}{c+di}+\dfrac{a-bi}{c-di}$

Respuesta.

a) $2(a^2-b^2)$ b) $2-12a^2+2a^4$ c) $\dfrac{2(ac+bd)}{c^2+d^2}$

5. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, demostrar:

a) $(1-w)(1-w^2)(1-w^4)(1-w^5)=9$

b) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{w}{x-w}+\dfrac{w^2}{x-w^2}=\dfrac{3}{x^3-1}$

6. Si α es una raíz séptima de la unidad distinta de 1, demostrar:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}+\frac{\alpha^3}{1+\alpha^6}=\,-2$$

7. Demostrar que la suma de las raíces cúbicas de $z=23\left(1+i\sqrt{3}\right)$ es nula.

8. Demuestre que

$$(1+i)\Big(1+\sqrt{3}\,i\Big)(cos\,\phi + i\,sen\,\phi) = 2\sqrt{2}\ cis\left(\tfrac{7\pi}{12}+\phi\right)$$

10. Demuestre que

$$[\,(\sqrt{3}\,+1)+(\sqrt{3}-1)\,i]^{\,60} = \,-\,2^{90}$$

11. Calcule

a) $(1+i)^{8n},\ \ n\in\mathbb{N}$

b) $(1+cos\,\phi+sen\,\phi\,i)^{n},\ n\in\mathbb{N}$

c) $(\dfrac{1+\ \sqrt{3}\,i}{1-i})^{108}$

Respuesta.

a) 2^{4n} b) $2^{n}cos^{n}\frac{\phi}{2}\,e^{i\frac{n\phi}{2}}$ c) $-\,2^{54}$

12. Resolver

a) $z^2+2\,(1+2i)\,z-(11+2i)=0$

b) $(1+i)\,z^2-(7-13\,i)\,z+2+60\,i=0$

c) $\sqrt{3}\,z^2-z-i=0$

Respuesta.

a) $2-i,\ -4-3i$ b) $7-2i,\ 3+5i$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ \ -\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}i$

13. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos:

a) $z=1+4\sqrt{3}\,i$ b) $46-14\sqrt{3}\,i$

Respuesta.

a) $\pm\Big(2+\sqrt{3}\,i\Big)$ b) $\pm\Big(7-\sqrt{3}\,i\Big)$

14. Precisar donde se encuentran las imágenes de los complejos z, tales que:

a) $|z-i|\leq 1$ b) $|z|+z=2+i$

Respuesta.

a) Puntos interiores y en la frontera de la circunferencia de centro $(0,1)$ y $r=1$

b) $\left(\frac{3}{4},1\right)$

15. Hallar el lugar geométrico de la imagen del complejo z que verifica:

a) $|z|=2\,|z-1|$ b) $|z-1|\leq 2\,|z+1|$

Respuesta.

a) Circunferencia de centro $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y radio 2,

a) Puntos exteriores y en la frontera de la circunferencia de centro $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ y $r = 1$

16. Si $|z_1| = |z_2| = \cdot\cdot\cdot\cdot = |z_n| = 1$ demuestre que

$$|\, z_1 + z_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + z_n \,| = |\, \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{z_n} \,|$$

17. Determinar las partes real e imaginaria de

$$z = \left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)^{3n} + \left(-1 - \sqrt{3}\, i\right)^{3n}, \; n \in \mathbb{N}$$

Respuesta.

$Re\, z = 2^{3n+1}, \;\; Im\, z = 0$

18. Simplifique

a) $\left[\dfrac{1 + i\, tg\, \alpha}{1 - i\, tg\, \alpha}\right]^n$ b) $\left(\dfrac{1 + sen\, \theta\, + i\, cos\, \theta}{1 + sen\, \theta - i\, sen \theta}\right)^n$

Respuesta.

a) $cos\, n\alpha + i\, sen\, n\alpha$ b) $cos\, n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\, sen\, n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

19. Determine los valores que toma la expresión $A = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\, i\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\, i\right)^n$

según sea el valor de $n, (n \in \mathbb{N})$. Deduzca de lo anterior que, si n es múltiplo de 6,

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{5} + \cdot\cdot\cdot + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{n-1} = 0$$

20. Los complejos z_1 y z_2 son las raíces de la ecuación

$$z^2 - (8 + 5i)\, z + 8 + 26\, i = 0$$

Determine un complejo z_3, tal que el triángulo formado por z_1, z_2 y z_3 sea equilátero.

Respuesta.

$8 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\, i; \;\; 8 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\, i$

21. Si $u_1 = 2 + 3\, i$, $u_2 = -1 + i$ y $u_3 = 1 - 2\, i$. Encontrar tres complejos z_1, z_2 y z_3 que verifiquen el sistema

$$u_1 = z_1 + z_2 + z_3$$
$$u_2 = z_1 + w_1 z_2 + w_2 z_3$$
$$u_3 = z_1 + w_2 z_2 + w_1 z_3$$

Donde $1, w_1$ y w_2 son las raíces cúbicas de la unidad en orden creciente de sus argumentos.

Respuesta.

$z_1 = \frac{2}{3}(1+i), \quad z_2 = \frac{1}{6}\left(4+3\sqrt{3}\right) - \frac{1}{6}\left(2\sqrt{3} - 7\right) i,$
$z_3 = \frac{1}{6}\left(4-3\sqrt{3}\right) + \frac{1}{6}\left(2\sqrt{3} + 7\right) i$

22. Si $x = a+b, \ y = aw + bw^2$ y $z = aw^2 + bw,$ donde w es una raíz cúbica compleja de la unidad, demostrar que:

   a) $x\,y\,z = a^3 + b^3$
   b) $x^2 + y^2 + z^2 = 6\,ab$

23. Calcular $(1+w)^n + (1+w^2)^n,$ en que w es una de las raíces cúbicas complejas de la unidad.

Respuesta.

$2cos\, n\frac{\pi}{3}$

24. Determinar a y b de manera que $z = 1+i$ sea una raíz de la ecuación

$$z^5 + az^3 + b = 0$$

Respuesta.

$a = 2, \ \ b = 8$

25. Demostrar que el número $z = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ satisface cada una de las ecuaciones siguientes:

   a) $\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z} = 1$
   b) $z^8 - z^7 + z^6 + z^2 + z = 1$

26. Demostrar que si $z^2 = (\overline{z})^2, \ z$ es real o bien imaginario puro.

27. Calcular:

   a) Las raíces quintas de $-32.$

   b) Las raíces cuadradas de $i.$

Respuesta.

a) $z_k = 2\,e^{\frac{(2k+1)\pi}{5}i}, \ k = 0,1,2,3,4.$ b) $z_k = e^{(k\pi + \frac{\pi}{4})i}, \ k = 0,1.$

28. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $z^4 - (z+1)^4 = 0$

b) $z^6 - 1 + i = 0$

Respuesta.

a) $z = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}, \ \alpha_k = e^{k\frac{\pi}{2}i}, \ k = 1, 2, 3.$

b) $z = \sqrt[12]{2}\, e^{(8k-1)\frac{\pi}{4}i}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

29. Dado el complejo $z = (sen\,\alpha - sen\,\beta) - (cos\,\alpha - cos\,\beta)\,i,$ calcular $z^{20}.$

Respuesta.

$2^{20}(sen\,\frac{\alpha-\beta}{2})^{20} cis\,10(\alpha+\beta)$

30. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$

b) $\left(1 + \sqrt{1-z^2}\right)^n = \left(1 - \sqrt{1-z^2}\right)^n$

c) $z^n = (z+1)^n$

Respuesta.

a) $z = \dfrac{(\alpha_k+1)i}{\alpha_k - 1}, \ \alpha_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

b) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha_k}}, \ \alpha_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

c) $z = \frac{1}{\alpha_k - 1}, \alpha_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \ k = 1, 2, \ldots, (n-1)$

31. Demostrar que $Re\,z > 0$ si y solo si $|z-1| < |z+1|$, y dibuje los puntos del plano complejo que satisfacen esta relación .

32. Demostrar que la ecuación $32\,z^5 = (z+1)^5$ tiene cuatro raíces imaginarias, dos de las cuales están en el segundo cuadrante y dos en el tercero. Demostrar tambien que todas las raíces están sobre la circunferencia $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = (\frac{2}{3})^2$

33. Demostrar que:

a) $cos\,5\theta = cos^5\theta - 10\,cos^3\theta\,sen^2\theta + 5\,cos\,\theta\,sen^4\theta$

b) $cos^8\theta + sen^8\theta = \frac{1}{64}(cos\,8\theta + 28\,cos\,4\theta + 35)$

34. Si n es múltiplo $4,$ demostrar que

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + ni^{n-1} = -\tfrac{n}{2}(1+i)$$

35. Para $z \neq 1$ se tiene

$$1 + z + z^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

aproveche esta igualdad para demostrar

$$\sum_{k=0}^{n} cos\, k\theta \ = \frac{1}{2} + \frac{sen(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\, sen\, \frac{\theta}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n} sen\, k\theta \ = \frac{1}{2}\, cotg\, \frac{\theta}{2} - \frac{cos(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\, sen\, \frac{\theta}{2}}, \ \ 0 < \theta < 2\,\pi$$

36. Demostrar que si los puntos z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero, entonces $z_1^2 + z_1^2 + z_1^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

37. Sean z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo isósceles, siendo $\beta = \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$.
Demostrar que: $(z_3 - z_2)^2 = 4(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)\, sen^2\, \frac{\alpha}{2}$

38. Sea el complejo $z = A(1 + t\, i)$ con t real, probar que cuando t varía z describe una recta que pasa por A y perpendicular a OA.

39. Probar que la ecuación $\overline{z_0}\, z + z_0 \overline{z} + k = 0$, con k real, representa a una recta que es perpendicular a la dirección z_0.

40. Los complejos variables z y w verifican siempre $w = z^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinar el lugar geométrico de w, cuando z recorre:

    i) La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

    ii) La recta $y = x$

41. Probar que una circunferencia de centro c y radio r, se puede expresar por

$$p = c + \frac{1 + i\, t}{1 - i\, t}\, r; \ \ t \in \mathbb{R}$$