

# Capítulo 1

## Introducción a la lógica matemática y a la teoría de conjuntos

### 1.1. Introducción

En el álgebra actual tiene importancia y muy especialmente en el cálculo que se efectúa con procesadores electrónicos, el análisis del lenguaje desde un punto de vista lógico. Las expresiones de este lenguaje pueden tomar formas complicadas, pero el análisis de sus partes ofrece la alternativa de desentrañar la esencia de la lógica de las formas expresivas más complejas.

En estas notas, que no pretenden ser más que una introducción, no tendría sentido extenderse en la consideración de los problemas de la lógica matemática sobre los cuales el lector interesado podrá consultar obras de buen nivel indicadas en la bibliografía.

Aquí nos interesaremos en un tipo especial de *proposiciones* como por ejemplo *5 es un número*, *los caballos son negros*,  *$x^2$  es siempre positivo para todo real  $x$* , ... notemos que a estas expresiones se les puede asignar un valor, según sean verdaderas o falsas. Quedarán excluidas de nuestra con-

sideración, expresiones tales como: *Abre la ventana, Estudia con dedicación,*  
...

## 1.2. Elementos de lógica

**Proposición.** Una proposición es una expresión de la cual se puede decir siempre si es verdadera o es falsa (V o F).

Por tanto, se dice que las proposiciones son *bivalentes*, conviene observar que no compete a la lógica establecer el valor de verdad de las proposiciones, es decir, se considerarán las proposiciones simples con su valor ya asignado.

**Notación.** Por costumbre a las proposiciones las denotaremos mediante las letras:  $p, q, r, \dots$

**Convención.** Si convenimos en considerar el *conjunto*  $U$  de todas las posibles proposiciones del lenguaje como conjunto universo, si  $p$  pertenece a  $U$ , se denotan por  $p \in U$ .

**Conectivos o símbolos.** Ocuparemos los siguientes símbolos, llamados también conectivos lógicos

$\sim$	:	Negación
$\wedge$	:	Conjunción
$\vee$	:	Disyunción
$\Rightarrow$	:	Implicación
$\Leftrightarrow$	:	Doble implicación
$\underline{\vee}$	:	Disyunción excluyente

Antes de definirlos rigurosamente, es conveniente que el lector considere los siguientes comentarios.

La relación que establece la conjunción “y” simbólicamente por “ $\wedge$ ” entre dos proposiciones en el lenguaje común es perfectamente clara, es decir, no da lugar a ninguna ambigüedad.

Por ejemplo, consideramos las proposiciones *el 5 es un número* ( $p$ ), *el caballo es un animal* ( $q$ ), al decir el 5 es un número y el caballo es un animal (decimos las dos cosas), esta relación se simboliza en lógica:  $p \wedge q$ .

La relación  $\wedge$  permite definir una operación algebraica entre proposiciones, en rigor

$$p \in U \text{ y } q \in U \text{ es } (p \wedge q) \in U.$$

En cambio, la relación establecida entre dos proposiciones por la disyunción  $o$ , ya no es tan clara. En efecto, si analizamos un poco veremos que, en el lenguaje corriente no tiene significado preciso y único.

Por ejemplo, si consideramos *el sábado iré al cine o al estadio*, para cualquiera resulta claro que si voy a un lugar no iré al otro, es decir, que una de las acciones que realizaré excluye la otra.

Si en cambio se dice, *regalaré los zapatos viejos o los zapatos negros*, se entiende que los zapatos que regalaré son los viejos y también los negros (aunque no sean viejos). El  $o$  no es en este caso excluyente.

Si en ambos casos se comprende lo que se quiere decir, es por el sentido general de la frase, pero desde el punto de vista lógico sí nos preocupamos exclusivamente en su valor de verdad o falsedad es claro que hay dos interpretaciones diferentes para la relación establecida entre proposiciones por  $o$ .

En forma simbólica, entonces, consideramos  $\underline{\vee}$  para el  $o$  excluyente y  $\vee$  para el  $o$  inclusivo.

Dada una proposición  $p$ , simbolizamos mediante  $\sim p$  la negación de esta proposición.

Por ejemplo, si  $p$  es: *el 6 es un número par*,  $\sim p$  será: *el 6 no es un número par*.

**Definición.** Sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones, definiremos las proposiciones  $\sim p$ ,  $p \wedge q$ ,  $p \vee q$  y  $p \underline{\vee} q$  mediante las llamadas *tablas de verdad*.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$--$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$--$	$F$	$F$	$F$

**Equivalencia.** Las tablas de verdad permiten definir la equivalencia o igualdad entre operaciones: dos operaciones serán equivalente si y sólo si poseen la misma tabla de verdad.

La equivalencia la simbolizaremos por “ $\equiv$ ”.

**Implicación.** Otra operación con proposiciones puede definirse a partir de: *si  $p$  entonces  $q$*  que simbolizaremos por:  $p \Rightarrow q$  y se acostumbra a llamar relación de implicación o condicional.

Sin considerar el contenido de la operación entre proposiciones y de las cuales solo interesan el valor de verdad,  $p \Rightarrow q$  será  $V$  si  $p$  y  $q$  son verdaderas y será falsa si  $p$  es verdadera y  $q$  falsa. La tabla de verdad de la operación se completa *conviniendo* siempre que  $p$  sea falsa, el valor de verdad de  $p \Rightarrow q$  será  $V$ .

Lo anterior se resume en

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

Trataremos de explicar en lo posible la arbitrariedad de esta definición.

El lector puede probar sin dificultad que:  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ .

El uso del condicional para vincular proposiciones sin relación entre si, puede hacer ver como paradójales, por ejemplo,

*Si la escalera es de madera, entonces el perro es un mamífero*

se trata de una proposición compuesta, verdadera si las dos proposiciones simples son verdaderas. Sin embargo, debe recordarse que la proposición compuesta anterior no tiene ni más ni menos significado que lo que resulta aplicando la conjunción de las mismas dos proposiciones simples,

*La escalera es de madera y el perro es un mamífero.*

Lo importante es indicar que cuando el condicional se usa para expresar que una proposición *implica lógicamente* otra, lo que se expresa al escribir:  $p \Rightarrow q$  significa que *q es verdadera en todos los casos lógicamente posible en que p es verdadera*. En tal caso, el condicional no es una operación entre dos proposiciones simples sino una *relación* entre la proposición simple  $p$  y la compuesta  $p \Rightarrow q$ . Por tanto,  $p \Rightarrow q$  debe entenderse como: *Si p es verdadera implicará q verdadera si y sólo si el condicional  $p \Rightarrow q$  es lógicamente verdadero*. Dicho de otra forma,  $p \Rightarrow q$  significa, *q es verdadera siempre que p sea verdadera*.

**Teoremas.** En Matemática la relación de implicación se usa como un método de razonamiento:  $p \Rightarrow q$  significa ahora *q se deduce lógicamente de p*.

En general, un teorema expresa: *si p es verdadera entonces q es verdadera*, así se dice que  $p$  es una hipótesis y  $q$  es una tesis.

$p \Rightarrow q$  puede leerse de las siguientes maneras: *si p entonces q*,  $p$  es condición suficiente para  $q$ , *q es condición necesaria para p*, *q si p*, *p sólo si q*.

Si  $p \Rightarrow q$  se llama un *teorema directo*

$q \Rightarrow p$  se llama al *teorema recíproco*

$\sim p \Rightarrow \sim q$  se acostumbra a llamar el *teorema inverso*

$\sim q \Rightarrow \sim p$  se llama finalmente el *teorema contrarecíproco*.

Nótese que sus tablas de verdad son fácilmente construibles, es decir:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

De estas tablas se tiene que los teoremas directo y contrarecíproco tienen el mismo valor de verdad, como también los teoremas recíproco e inverso.

Nótese también que como

$$\begin{aligned}
 p \Rightarrow q &\equiv \sim p \vee q \\
 &\equiv q \vee \sim p \\
 &\equiv \sim (\sim q) \vee \sim p \\
 &\equiv \sim q \Rightarrow \sim p
 \end{aligned}$$

como era de esperar.

**Ejemplo.** Sea el *teorema directo*: si  $n^2$  es par, entonces  $n$  es par,  $n \in \mathbb{N}$  (verdadero).

Esto puede expresarse en forma equivalente diciendo:

1. Que  $n^2$  sea par es condición suficiente (pero no necesaria) para que  $n$  sea par.
2. Que  $n$  sea par es condición necesaria (pero no suficiente) para que  $n^2$  sea par.
3.  $n$  es par si  $n^2$  es par.

4.  $n^2$  es par sólo si  $n$  par.

El teorema recíproco: del directo dado será si  $n$  es par entonces  $n^2$  es par (verdadero).

El teorema inverso: si  $n^2$  es impar (no es par) entonces  $n$  es impar (verdadero).

El teorema contrarecíproco: si  $n$  es impar entonces  $n^2$  es impar (verdadero).

La demostración de este teorema directo la haremos por el teorema contrarecíproco, es decir:

$$\begin{aligned} \text{Si } n \text{ es impar } \Rightarrow n = 2k - 1 &\Rightarrow n^2 = 4k^2 - 4k + 1, \quad k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2p + 1, p = 2k^2 - 2k, p \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

por tanto,  $n^2$  es impar.

Nótese que el teorema del ejemplo anterior puede completarse como:

$$n^2 \text{ es par si y sólo si } n \text{ es par (verdadero)}$$

En matemática el *si y sólo si* simbólicamente se expresa por  $\Leftrightarrow$  que se llama *bicondicional o doble implicación* y se expresa también por *p es condición necesaria y suficiente para que q*

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

de donde su tabla de verdad fácilmente es

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$

Volviendo al teorema  $n^2$  es par  $\Leftrightarrow n$  es par (\*).

La demostración de: si  $n$  es par entonces  $n^2$  es par, es trivial.

Notemos por último que en una proposición como (\*) que es verdadera, todos los teoremas: directo, recíproco, inverso y contrarecíproco son verdaderos. No ocurre así en un teorema directo del tipo  $p \Rightarrow q$  (verdadero), tal es el caso del ejemplo siguiente:

*Si el  $\Delta ABC$  es equilátero, entonces el  $\Delta ABC$  es isósceles.* (Verdadero)

El recíproco e inverso son falsos (compruébelo Ud.).

En resumen:

Para formalizar la demostración de muchas proposiciones en matemática que se presentan en la forma  $p \Rightarrow q$  o  $q \Rightarrow p$ , se tiene los siguientes casos:  $p \Rightarrow q$  es V, o  $q \Rightarrow p$  es V, o ambas son verdaderas. Es decir:

1. Si  $p \Rightarrow q$  es V ( $p$  es condición suficiente para  $q$ ).
2. Si  $q \Rightarrow p$  es V ( $p$  es condición necesaria para que  $q$ ).
3. Si  $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$  son verdaderos entonces se dice que  $p$  es condición necesaria y suficiente para  $q$  y se ocupa  $p \Leftrightarrow q$  también se dice  *$p$  si y sólo si  $q$*  o  *$p$  ssi  $q$* .

**Formas de demostración.** En concreto hay dos formas de demostración:

1. Forma directa:  $\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\text{Tesis}}$
2. Forma indirecta (reducción al absurdo): este método consiste en negar la tesis y considerarla como hipótesis y se trata de inferir válidamente la negación *de alguna* de las hipótesis  $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ .



$$\underbrace{(\sim q)} \quad \wedge p_1 \wedge p_2 \dots p_{i-1} \wedge p_{i+1} \dots \Rightarrow \sim p_i \text{ para algún } i,$$

Negación de la tesis  
 $i = 1, 2, \dots, n$   
 En efecto:

$$\begin{aligned} & \sim [\sim q \wedge (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{i-1} \wedge p_{i+1} \wedge \dots \wedge p_n)] \vee \sim p_i \\ \Leftrightarrow & q \vee \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{i-1} \wedge p_{i+1} \wedge \dots \wedge p_n) \vee \sim p_i \\ \Leftrightarrow & q \vee \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{i-1} \wedge p_i \wedge p_{i+1} \wedge \dots \wedge p_n) \\ \Leftrightarrow & \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q \Leftrightarrow [p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n] \Rightarrow q \end{aligned}$$

**Ejemplos.**

1. Vamos a demostrar por los dos métodos la siguiente implicación lógica:

$$(p \wedge q) \Rightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$$

**Forma directa:**

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \Rightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q) & \equiv \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \\ & \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \\ & \equiv (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \equiv V \end{aligned}$$

**Forma indirecta:**

$$\begin{aligned} (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \wedge q) & \equiv (\sim p \wedge p) \wedge (\sim q \wedge q) \Rightarrow \sim (p \wedge q) \\ & \equiv F \Rightarrow \sim (p \wedge q) \\ & \equiv V \vee \sim (p \wedge q) \equiv V \end{aligned}$$

2. (Clásico). Vamos a probar que  $\sqrt{2}$  no es un número racional. La demostración es por el método por reducción al absurdo (forma indirecta).

Suponemos que  $\sqrt{2}$  es racional, existen  $p$  y  $q$  primos entre sí,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ , tal que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow p = \sqrt{2}q \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ par} \Rightarrow p \text{ es par.}$$

Ahora, sea  $p = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \Leftrightarrow q^2$  es par  $\Rightarrow q$  es par, por tanto,  $p$  y  $q$  contienen al factor 2, lo que contradice que  $p$  y  $q$  sean primos entre sí, por tanto, lo supuesto no es válido, así  $\sqrt{2}$  no es racional.

Hemos visto como vincular entre sí dos proposiciones simples mediante los símbolos:  $\sim, \vee, \wedge, \underline{\vee}, \Rightarrow$  y  $\Leftrightarrow$ . A estas nuevas proposiciones les hemos llamado compuestas y naturalmente en este mismo contexto se pueden estudiar proposiciones compuestas de tres o más proposiciones simples, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sim(p \wedge q) &\Rightarrow (p \underline{\vee} q) \vee (\sim q) \\ (p \wedge q) &\Leftrightarrow (q \vee \sim p) \\ ((p \vee q) \wedge r) &\Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)\end{aligned}$$

### Definiciones

1. Diremos que una proposición es una *tautología* si la columna final de su tabla de verdad solo tiene  $V$ . O bien, si para cualquier valor de verdad para las proposiciones simples que la componen, su valor final es equivalente con  $V$ .
2. Diremos que una proposición es una *contradicción* si la columna final de su tabla de verdad solo tiene  $F$ .
3. Diremos que dos proposiciones  $p$  y  $q$  son equivalentes, en símbolos  $p \equiv q$ , si y sólo si  $p \Leftrightarrow q$  es una tautología.

Note que esta nueva definición es equivalente a la que se diera anteriormente.

**Propiedades.** A continuación daremos una lista de algunas equivalencias de uso frecuente. Sus demostraciones se dejan al lector.

1.  $p \wedge V \equiv p$ ;  $p \wedge F \equiv F$

2.  $p \vee V \equiv V; p \vee F = p$

3.  $p \wedge p \equiv p; p \vee p \equiv p$

4.  $\sim(\sim p) \equiv p; \sim F \equiv V; \sim V \equiv F$

5.  $p \wedge(\sim p) \equiv F; p \vee(\sim p) \equiv V$

6.  $p \wedge q \equiv q \wedge p; p \vee q \equiv q \vee p$

7.  $p \wedge(q \wedge r) \equiv((p \wedge q) \wedge r); p \vee(q \vee r) \equiv(p \vee q) \vee r$

8.  $p \wedge(q \vee r) \equiv(p \wedge q) \vee(p \wedge r);$

$p \vee(q \wedge r) \equiv(p \vee q) \wedge(p \vee r)$

9.  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q; \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

10.  $p \wedge(p \vee q) \equiv p; p \vee(p \wedge q) \equiv p$

### 1.3. Formas proposicionales

Decíamos anteriormente que una proposición es una expresión que puede ser verdadera o falsa. Para aclarar esta observación frecuentemente, en matemáticas, escribimos afirmaciones tales como:

a)  $x + 1 = 3$

b)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

c)  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

d)  $x^2 = 25 \wedge x + 1 = 6$

De estas afirmaciones no es posible decir si son verdaderas o falsas, porque aún no hemos fijado el valor de  $x$ , así en:

a) Es verdadera para  $x = 2$  y falsa para otro valor de  $x$ .

- b) Es verdadera para  $x = 2 \vee x = 3$  y falsa para otros valores de  $x$ .
- c) Verdadera para todos los valores numéricos de  $x$ ; falsa para ningún  $x$ .
- d) Verdadera para  $x = 5$  y falsa para otro valor de  $x$ .

**Definición.** Una forma proposicional o proposición abierta, es una afirmación que contiene a una o más variables, la cual llega a ser proposición cuando se especifican los valores de las variables.

### Observaciones.

1. Las formas proposicionales pueden contener dos o más variables.
2. La definición anterior no es completa, en tanto que se refiere a las *variables*, las cuales hasta ahora no han sido definidas.

Cuando nos encontramos ante el problema de asignar valores a  $x$ , debemos decidir que valores de  $x$  son posibles. Esto es, debemos tener ideas claras sobre un conjunto de números, figuras geométricas, gente, etc. que serán objeto de análisis. A este conjunto se acostumbra a llamar conjunto universo  $U$ .

**Definición.** Una variable es un elemento en una afirmación que puede ser reemplazada por un elemento del conjunto  $U$ .

Las variables, comúnmente pero no en exclusiva, se representan por las letras minúsculas del final del alfabeto, es decir,  $x, y, z$ .

**Definición.** Una constante es un elemento que se fija de antemano de un conjunto dado.

**Definición.** El conjunto verdadero de una forma proposicional es el conjunto de elementos del conjunto universo  $U$ , cuya sustitución por  $x$ , convierte la forma proposicional en una proposición verdadera.

En un estudio más formal utilizaremos notaciones tales como:  $p_x$  o  $p(x)$ ,  $q_x$ ,  $r_x, \dots$  etc. para representar formas proposicionales con variable  $x$ , al conjunto verdadero de  $p_x$  se denotará por  $\{x / p_x\}$ . Naturalmente los símbolos lógicos antes definidos para proposiciones simples o compuestas, se extienden para las formas proposicionales.

## 1.4. Cuantificadores

Observe el siguiente par de ejemplos:

1. Si  $k$  es un número entero impar, entonces  $k^2$  es un número entero impar.
2.  $x^2 = 1$  si y sólo si  $(x - 1)(x + 1) = 0$ , para todo  $x$  número real.

Como vimos anteriormente en el caso de 1) escribimos: Si  $p_k$  entonces  $q_k$  o más simplemente,  $p_k \Rightarrow q_k$  entonces

$p_k : k$  es un número entero impar.

$q_k : k^2$  es un número entero impar.

$p_k$  y  $q_k$  son formas proposicionales.

En el caso de 2), simplemente escribimos  $p_x \Leftrightarrow q_x$ .

No obstante, algo se nos ha escapado y que a menudo se ignora para 1): si  $k$  es un entero impar, entonces  $k^2$  es un entero impar, realmente queremos decir, *para todos* los enteros  $x$ , si es un entero impar, entonces  $k^2$  es un entero impar.

En otras palabras, nuestras implicaciones son proposiciones generales que tienen que ser verdaderas para todos los valores de la variable incluida, escribiremos esta situación en la forma

$$\forall x \in U : p_x \Rightarrow q_x \quad (*)$$

en la que se lee: para todos los  $x$  en  $U$ , si  $p_x$  entonces  $q_x$ .

El símbolo  $\forall$  se lee *para todo* y se llama *cuantificador universal*. Notemos que (\*) ya no es una forma proposicional, sino una proposición que es verdadera o falsa.

Analizando un poco más (\*), se tienen:

1. Si  $q_x$  es verdad para cada  $x$ , para la que  $p_x$  es también verdad, entonces  $\forall x \in U : p_x \Rightarrow q_x$  es verdad.
2. Si hay, por lo menos, un valor de  $x$  para el cual  $p_x$  es verdad y  $q_x$  es falso, entonces  $\forall x \in U : p_x \Rightarrow q_x$  es falso.

En resumen, “*para todo  $x \in U$ ,  $p_x$  es verdadero*” se simboliza por: “ $\forall x \in U : p_x$ ”. Ahora, notemos el siguiente ejemplo:

Sea  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ , *existe en  $U$  un elemento cuyo cuadrado es 4*. En símbolos se acostumbra a representar por:

$$\exists x \in U : x^2 = 4, p_x \quad (p_x : x^2 = 4)$$

$\exists$  se conoce con el nombre de *cuantificador existencial*.

Notemos que para este ejemplo la proposición es verdadera.

Así pues: “*existe  $x \in U$  tal que  $p_x$  es verdadera*” se denota por “ $\exists x \in U : p_x$ ”.

Otro ejemplo, *hay un elemento en  $U$  que es mayor que todos los demás, así,*

$$(\exists x \in U)(\forall y \in U)(x > y), \quad U = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Esta proposición es falsa.

En general, la verdad o falsedad de proposiciones como las que hemos escrito depende del conjunto Universo y de las operaciones definidas en éste.

**Ejemplo.** Averiguamos el valor de verdad de los siguientes enunciados:

$$p : \forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q} : 2x + y = 0$$

$$q : \exists y \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q} : 2x + y = 0$$

Para  $p$ :

$$\text{Si } x = \frac{1}{2} \quad \exists y = -1 : 2\frac{1}{2} + (-1) = 0 \quad (V)$$

$$\text{Si } x = -5 \quad \exists y = 10 : 2(-5) + 10 = 0 \quad (V),$$

es decir, para cualquier  $x \in \mathbb{Q}$  existe  $y = (-2x)$  tal que  $2x + y = 0$ , por tanto  $p$  es V.

Para  $q$ : si  $y = \frac{1}{2}$  la igualdad  $2x + \frac{1}{2} = 0$  no se cumple  $\forall x \in \mathbb{Q}$ , por tanto  $q$  es F.

**Negación de cuantificadores.** La regla general para construir la negación de una forma proposicional es la siguiente: Los  $\forall$  se cambian por  $\exists$  y los  $\exists$  se cambian por  $\forall$  y después se niega la forma proposicional. La negación de la forma se construye mecánicamente del mismo modo como se realiza la negación de una proposición.

**Ejemplos.**

1.  $\sim \{ \forall x \in U, \exists y \in U : x + y = 5 \Rightarrow x = y \} \equiv \exists x \in U, \forall y \in U :$   
 $\sim [ \sim (x + y) = 5 \vee (x = y) ] \equiv \exists x \in U, \forall y \in U : x + y = 5 \wedge x \neq y$
2.  $\sim \{ \forall x \in U, \forall y \in U, \exists z \in U (x < y \Rightarrow x + z = y) \}$   
 $\equiv \exists x \in U, \exists y \in U, \forall z \in U (x < y \wedge x + z \neq y).$

## 1.5. Ejercicios Resueltos

1. Siendo  $p$  los precios son bajos y  $q$  los precios no suben, escribir en lenguaje corriente las expresiones simbólicas siguientes:

- |                      |                           |
|----------------------|---------------------------|
| a) $\sim q$          | d) $\sim p \wedge \sim q$ |
| b) $p \wedge q$      | e) $\sim (p \vee \sim q)$ |
| c) $p \wedge \sim q$ |                           |

*Solución.*

- a)  $\sim q$ : los precios suben
- b)  $p \wedge q$ : los precios son bajos y los precios no suben
- c)  $p \wedge \sim q$ : los precios son bajos y los precios suben
- d)  $\sim p \wedge \sim q$ : los precios no son bajos y los precios suben
- e)  $\sim (p \vee \sim q)$ : no es cierto que los precios son bajos o los precios suben

2. Sean  $p$  tengo un loro y  $q$  tengo un gato, escribir en lenguaje corriente y luego simplificar,

$$\sim (\sim p \vee \sim (\sim q)) \wedge \sim (\sim p)$$

*Solución.*

Notemos previamente que:

$$\sim (\sim p \vee \sim (\sim q)) \wedge \sim (\sim p) \equiv \sim [(\sim p \vee \sim (\sim q)) \vee (\sim p)]$$

lo cual se puede escribir como: *No es cierto que no tengo un loro o no es cierto que no tengo un gato o bien, no tengo un loro* (\*)

Simplificando,

$$\sim (\sim p \vee \sim (\sim q)) \wedge \sim (\sim p) \equiv (p \wedge \sim q) \wedge p \equiv p \wedge (\sim q \wedge p) \equiv$$

$$p \wedge (p \wedge \sim q) \equiv (p \wedge p) \wedge \sim q \equiv p \wedge (\sim q)$$

Así, (\*) es equivalente a afirmar: *tengo un loro y no tengo un gato.*

3. Pruebe que:



a)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow (\sim q))$

b)  $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q) \Rightarrow r]$

*Solución.*

La haremos mediante tablas de verdad, luego:

a)

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim ($	$p$	$\Rightarrow$	$\sim q)$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	V

b)

$[p$	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)]$	$\Leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$\sim q$	$) \Rightarrow$	$r]$
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F

4. Pruebe que:

a)  $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

b)  $(a \Rightarrow b) \Rightarrow [(c \vee a) \Rightarrow (c \vee b)]$

*Solución.*

La haremos también por medio de Tablas de Verdad.

a)

$(a \Rightarrow b)$	$\wedge$	$(b \Rightarrow c)$	$\Rightarrow$	$(a \Rightarrow c)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F
V	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

b)

$(a \Rightarrow b)$	$\Rightarrow$	$[(c \vee a) \Rightarrow (c \vee b)]$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Como se podrá dar cuenta las pruebas mediante el uso de tablas de verdad son sencillas, a modo de ejercicio Ud. puede verificar mediante éstas, todas las pruebas de las propiedades del álgebra de proposiciones establecidas anteriormente.

5. Siendo  $p$  y  $q$  proposiciones cualesquiera, la proposición,  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \Leftrightarrow q]$ ,
  - a) ¿Es siempre verdadera?
  - b) ¿Es verdadera si y sólo si  $p$  lo es?
  - c) ¿Es verdadera si y sólo si  $q$  es falsa?
  - d) ¿Es verdadera si y sólo si  $p$  y  $q$  lo son?

*Solución.*

Construyendo su tabla de verdad, tenemos:

$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$[(p \vee q) \Leftrightarrow q]$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

La tabla de verdad de esta proposición nos indica que siempre es verdadera (tautología).

6. Pruebe, sin hacer uso de tablas de verdad, que:

$$a) p \wedge (\sim q) \Rightarrow r \equiv (\sim p) \vee (q \vee r)$$

$$b) [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\sim q) \equiv (r \wedge (\sim q))$$

*Solución.*

a) Teniendo presente las propiedades del álgebra de proposiciones enunciadas anteriormente, tenemos:

$$(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow r \equiv \sim (p \wedge (\sim q)) \vee r \equiv ((\sim p) \vee q) \vee r \equiv (\sim p) \vee (q \vee r).$$

$$b) [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\sim q) \equiv [(p \wedge q) \wedge (\sim q)] \vee (r \wedge (\sim q)) \equiv \\ \equiv [p \wedge (q \wedge (\sim q))] \vee (r \wedge (\sim q)) \equiv [p \wedge F] \vee (r \wedge (\sim q)) \equiv \\ \equiv F \vee (r \wedge (\sim q)) \equiv (r \wedge (\sim q)).$$

7. ¿Cuál es la relación que existe entre las proposiciones siguientes?:

$$p \Rightarrow [p \wedge \sim (q \vee r)] \quad \text{y} \quad \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r).$$

*Solución.* Transformando la primera expresión, tenemos:

$$p \Rightarrow [p \wedge \sim (q \vee r)] \equiv (\sim p) \vee [p \wedge ((\sim q) \wedge (\sim r))] \equiv \\ \equiv [(\sim p) \vee p] \wedge [(\sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r)] \equiv V \wedge [(\sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r)] \equiv \\ \equiv (\sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r).$$

Con lo que podemos afirmar que entre estas dos proposiciones hay una relación de equivalencia.

8. Se define  $\Delta$  como la conjunción negativa, es decir,  $p\Delta q$  se lee *ni p ni q*.

a) Construya la tabla de verdad de  $p\Delta q$ .

b) Pruebe que:

i)  $\sim p \equiv p\Delta p$

ii)  $p \vee q \equiv (p\Delta q)\Delta(p\Delta q)$

iii)  $p \wedge q \equiv (p\Delta p)\Delta(q\Delta q)$

iv)  $(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q) \equiv p\Delta q$

*Solución.*

a) Nótese que  $p\Delta q$  es verdadero si no es verdadero  $p$  ni lo es  $q$ , luego

$p$	$q$	$p\Delta q$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

b) i)

$p$	$\sim p$	$p\Delta p$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$

ii) Por i)  $p \vee q \equiv \sim (p\Delta q)$ , por tanto,

$p$	$q$	$p \vee q$	$p\Delta q$	$\sim (p\Delta q)$
$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$

iii) Por i) es suficiente probar  $p \wedge q \equiv \sim p\Delta \sim q$

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p\Delta \sim q$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } p \Leftrightarrow q \wedge \sim (p \wedge q) &\equiv [p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p] \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
 &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
 &\equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim q \vee (p \wedge \sim p)] \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q) \\
 &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q) \\
 &\equiv \sim (p \Delta q) \equiv p \Delta q
 \end{aligned}$$

9. Simplifique la siguiente expresión:  $[(\sim p) \vee (\sim q \Leftrightarrow p)] \Rightarrow q$ .

Nosotros usaremos que:  $(\sim q \Leftrightarrow p) \equiv (\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ . Usted verifíquelo a modo de ejercicio, luego:

$$\begin{aligned}
 &[(\sim p) \vee (\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow q; \text{ y como } a \Rightarrow b \equiv \sim a \vee b \\
 &\sim [\sim p \vee (q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \equiv \sim [(\sim p \vee q) \vee p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \\
 &\equiv \sim [(q \vee \sim p) \vee p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \equiv \sim [q \vee (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \equiv \\
 &\equiv \sim [q \vee V \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \equiv \sim [V \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \vee q \equiv \\
 &\equiv (p \wedge q) \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (V \wedge q) \equiv (p \vee V) \wedge q \equiv V \wedge q \equiv q
 \end{aligned}$$

10. Simplifique las siguientes expresiones:

- a)  $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
- b)  $[(p \wedge q) \vee r] \wedge (\sim q)$
- c)  $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$

*Solución.*

$$\text{a) } \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv \sim p \wedge V \equiv \sim p.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\sim q) &\equiv (p \wedge q) \wedge (\sim q) \vee (r \wedge \sim q) \equiv p \wedge (q \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim q) \\
 &\equiv (p \wedge F) \vee (r \wedge \sim q) \equiv F \vee (r \wedge \sim q) \equiv (r \wedge \sim q).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \vee (p \vee q) \equiv \\
 &\equiv \sim [\sim (\sim p \vee q) \vee q] \vee (p \vee q) \equiv \sim [(p \wedge \sim q) \vee q] \vee (p \vee q) \equiv \\
 &\equiv [\sim (p \wedge \sim q) \wedge (\sim q)] \vee (p \vee q) \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q)] \vee (p \vee q) \equiv \\
 &\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \vee (p \vee q) \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee F] \vee (p \vee q) \equiv \\
 &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee q) \equiv \sim (p \vee q) \vee (p \vee q) \equiv V,
 \end{aligned}$$

esto quiere decir que la proposición es una tautología.

11. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  el conjunto universal. Determinar el valor de verdad de cada enunciado:

- a)  $\forall x : x + 3 < 6$
- b)  $\forall x : x^2 - 10 \leq 8$
- c)  $\exists x : 2x^2 + x = 15$
- d)  $\exists x : x^2 > 1 \Rightarrow x + 2 = 0$

*Solución.*

- a) Falso, porque si  $x = 4 : 4 + 3 = 7 \not< 6$
- b) Verdadero.  $1^2 - 10 = -9 \leq 8; 2^2 - 10 = -6 \leq 8; 3^2 - 10 = -1 \leq 8; 4^2 - 10 = 6 \leq 8$
- c) Falso. No existe  $x \in A : 2x^2 + x = 15$
- d) Verdadero, porque si  $x = 1 : 1 > 1 \Rightarrow 1 + 2 = 0, (F \Rightarrow F \equiv V)$ .

12. Negar los siguientes enunciados:

- a)  $\exists y p(y) \Rightarrow \forall x (\sim q(x))$
- b)  $\exists x (\sim p(x)) \vee \forall x q(x)$
- c)  $\exists x \forall y (p(x, y) \Rightarrow q(x, y))$

*Solución.*

- a)  $\exists y p(y) \Rightarrow \forall x (\sim q(x)) \equiv \sim (\exists y p(y)) \vee \forall x (\sim q(x))$ , ahora negando:  $\sim [\sim (\exists y p(y)) \vee \forall x (\sim q(x))] \equiv \exists y p(y) \wedge \exists x q(x)$ .
- b)  $\sim [\exists x (\sim p(x)) \vee \forall x q(x)] \equiv \forall x p(x) \wedge \exists x (\sim q(x))$
- c)  $\sim [\exists x \forall y (p(x, y) \Rightarrow q(x, y))] \equiv \forall x \exists y \sim [p(x, y) \Rightarrow q(x, y)] \equiv \forall x \exists y \sim [\sim p(x, y) \vee q(x, y)] \equiv \forall x \exists y (p(x, y) \wedge \sim q(x, y))$ .

13. Se sabe que:

Si Pedro no es alumno de la U.C. o Juan es alumno de la U.C., entonces Juan es alumno de la U. Ch.

Si Pedro es alumno de la U.C. y Juan no es alumno de la U. Ch., entonces Juan es alumno de la U.C.

Se desea saber en que universidad estudia Juan.

*Solución.*

Sean  $p$ : Pedro es alumno de la U.C.

$q$ : Juan es alumno de la U.Ch.

$r$ : Juan es alumno de la U.C.

Sabemos que:

$$\{[(\sim p \vee r) \Rightarrow q] \wedge [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]\} \equiv V$$

$$\{[\sim (\sim p \vee r) \vee q] \wedge [\sim (p \wedge \sim q) \vee r]\} \equiv V$$

$$\{[\sim (\sim p \vee r) \vee q] \wedge [(\sim p \vee q) \vee r]\} \equiv V$$

$$\{[\sim (\sim p \vee r) \wedge (\sim p \vee r)] \vee q\} \equiv V$$

$$[F \vee q] \equiv V \Leftrightarrow q \equiv V$$

Luego, Juan es alumno de la U.Ch.

14. Negar la siguiente expresión:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$$

*Solución.*

Previamente:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\sim (0 < |x - x_0| < \delta) \vee |f(x) - \ell| < \epsilon)$$

ahora negando resulta:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - \ell| \geq \epsilon)$$

15. A partir del álgebra proposicional, demostrar la validez del siguiente argumento:

Si 2 es par, entonces 5 no es divisor de 9 por otra parte 11 no es primo ó 5 es divisor de 9. Además, 11 es primo. Por tanto, 2 es impar.

*Solución.*

Sean:

$p$  : 2 es par  
 $q$  : 5 es divisor de 9  
 $r$  : 11 es primo

y el argumento se expresa por:

$$\{[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q)] \wedge r\} \Rightarrow \sim p$$

lo que es verdadero, pues:

$$\begin{aligned} & \{[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q)] \wedge r\} \\ \Leftrightarrow & \{[\sim(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \wedge (r \Rightarrow q)\} \wedge r \text{ contrareciproco} \\ \Leftrightarrow & \{(q \Rightarrow \sim p) \wedge [(r \Rightarrow q) \wedge r]\} \\ \Leftrightarrow & \{r \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)\} \text{ conmutatividad} \end{aligned}$$

pero como  $r \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow q$ , (\*) se tiene que:

$$\Rightarrow \{q \wedge (q \Rightarrow \sim p)\} \Rightarrow \sim p \text{ (hemos aplicado nuevamente (*))}$$

16. Demuestre:

- a)  $p \underline{\vee} q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$   
 b)  $\sim [p \Rightarrow \sim (q \underline{\vee} \sim p)] \Leftrightarrow (p \wedge q)$

*Demostración.*

- a) Es simple, verificar mediante tablas.  
 b) Tenemos que:

$$\begin{aligned} \sim [p \Rightarrow \sim (q \underline{\vee} \sim p)] & \Leftrightarrow [p \wedge (q \vee \sim p) \wedge \sim (q \wedge \sim p)] \\ & \Leftrightarrow [p \wedge (q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee p)] \\ & \Leftrightarrow \{[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p)] \wedge (\sim q \vee p)\} \\ & \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow p \wedge [q \wedge (\sim q \vee p)] \\ & \Leftrightarrow p \wedge [(q \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)] \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge p) \Leftrightarrow p \wedge q \end{aligned}$$

## 1.6. Ejercicios propuestos

1. Siendo  $p$ : José es estudioso y  $q$ : Juan es estudioso, escribir en forma simbólica:



- a) José es estudioso y Juan no es estudioso.
- b) José no es estudioso y Juan es estudioso.
- c) José y Juan, no son estudiosos.
- d) No es cierto que Juan o José sean estudiosos.

*Respuestas.*

- a)  $p \wedge (\sim q)$
- b)  $(\sim p) \wedge q$
- c)  $\sim p \wedge \sim q$
- d)  $\sim (q \vee p)$

2. En cual de sus significados está “o”(no excluyente) en las siguientes proposiciones:

- a) Si ganáse mucho dinero o ganara la lotería, haría un viaje.
- b) El lunes iré a la estación de trenes o al terminal de buses.
- c)  $x = 3$  ó  $x = -2$

*Respuesta.* En a)

3. Verificar, utilizando tablas de verdad, cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a)  $p \vee \sim q$ ;
- b)  $\sim p \vee q$ ;
- c)  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ;
- d)  $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

*Respuesta.* Son equivalentes a), c) y d).

4. Encuentre el valor de verdad de

$$[\sim (p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee (r \Rightarrow \sim p)$$

si  $p$ : el número 2 es par,  $q$  es  $F$  y  $r$ : los gatos tienen 5 patas.

*Respuesta.*  $V$

5. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones:

- a)  $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$
- b)  $p \vee (q \vee r)$
- c)  $\sim (\sim p \Leftrightarrow q)$
- d)  $\sim (\sim p \Leftrightarrow q)$
- e)  $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
- f)  $[p \wedge (\sim q \Rightarrow p)] \wedge [(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (q \vee \sim p)]$

6. Pruebe que son tautologías:

- a)  $[p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p]$
- b)  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$
- c)  $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- d)  $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
- e)  $p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$
- f)  $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$
- g)  $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

7. Probar las siguientes equivalencias:

- a)  $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- b)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- c)  $p \vee q \equiv (p \vee q) \vee (p \wedge q)$
- d)  $p \wedge q \equiv p \vee (p \wedge \sim q)$
- e)  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- f)  $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- g)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .

8. Averiguar si son equivalentes las proposiciones:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{y} \quad [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$$

*Respuesta.No.*

9. Encuentre el valor de verdad de:  $[(p \Rightarrow q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$  si

- a)  $p$  es V,  $q$  es V,  $r$  es F
- b)  $p, r$  son F,  $q$  es V
- c)  $p$  es F,  $q$  es F y  $r$  es F
- d) si todas son verdaderas

10. Simplificar las siguientes proposiciones:

- a)  $p \wedge (q \wedge \sim p)$
- b)  $(p \wedge q) \vee p$
- c)  $(p \Rightarrow q) \vee \sim p$
- d)  $(p \Rightarrow q) \vee p$
- e)  $(q \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- f)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
- g)  $(p \Rightarrow \sim q) \vee q$
- h)  $p \wedge \sim (q \Rightarrow p)$
- i)  $[p \vee (q \Leftrightarrow \sim p)] \Rightarrow \sim q$
- j)  $[\sim (p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee [r \Rightarrow (p \vee r)]$
- k)  $\sim p \wedge (q \wedge p)$
- l)  $\{p \Rightarrow (\sim p \vee r)\} \wedge \{r \Rightarrow \sim p\}$
- m)  $\{\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim (q \Rightarrow p)\} \wedge (p \vee q)$

*Respuestas.*

- |                      |             |
|----------------------|-------------|
| a) F                 | h) F        |
| b) $p$               | i) $\sim p$ |
| c) $p \Rightarrow q$ | j) V        |
| d) V                 | k) F        |
| e) $p \vee q$        | l) $\sim p$ |
| f) $\sim q$          | m) $q$      |
| g) V                 |             |

11. Derive a partir de las equivalencias elementales, las siguientes equivalencias:

a)  $((p \wedge q) \Rightarrow r) \equiv ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$

b)  $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow \sim p \equiv q \Rightarrow \sim p$

12. Demostrar sin el uso de tablas de verdad:

a)  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b)  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

c)  $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

d)  $\sim (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

e)  $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r \equiv \sim p \vee (q \vee r)$

f)  $[\{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow t)\} \vee \{(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow t)\}] \equiv \{(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge t)\}$

13. Expresar en símbolos lógicos y después niegue las siguientes oraciones:

a) Todo múltiplo de 4 es número primo.

b) Si 2 es par entonces todos los números son pares.

c) Todo número mayor que 2 es la suma de dos números primos.

14. Sea  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Escribir en símbolos y averiguar el valor de verdad de:

a) Hay un elemento que es mayor que todos.

b) Existe un único elemento cuyo cuadrado es 4.

c) Para todos los elementos de  $A$ , sea  $x$  el elemento que sumado 1 unidad, siempre es mayor que cero entonces su cuadrado es menor que 35.

d) Para cada elemento existe otro que es menor o igual que él.

15. Si las proposiciones  $a$  y  $b$  son tales que la proposición  $\sim (a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$  es verdadera, determinar el valor de verdad de  $(a \wedge b) \vee (a \vee b)$ .

16. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

a) Hallar el valor de verdad de los siguientes enunciados

b) Negar estos enunciados:

1)  $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

- 2)  $\forall x \in A)(x + 3 < 10)$
- 3)  $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$
- 4)  $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$
- 5)  $(\exists! x \in A)(x^2 - 3x + 2 = 0)$

17. Escribir en símbolos las siguientes expresiones. Considere como universo el conjunto de los números naturales.

- a) Todo número es mayor o igual que sí mismo.
- b) Si el número  $x$  es menor que  $y$ , entonces no es mayor que 9.
- c)  $x$  sumado con algún número resulta  $x$ .
- d) El producto de  $x$  con  $y$  es mayor que  $x$ , y mayor que  $y$ .

18. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- a) Si  $p \vee q \equiv F$  entonces  $\sim [(\sim q \Rightarrow p) \wedge \sim p]$  es una tautología.
- b) Es suficiente que  $p \vee q$  sea falsa para que  $p$  y  $q$  sean equivalentes.
- c) No es necesario que  $p$  sea verdadera y  $q$  sea falsa para que  $[p \vee (q \wedge \sim p)] \vee \sim q$  sea verdadero.

*Respuesta.* a), b) y c) son verdaderas.

19. Demuestre las siguientes equivalencias sin uso de tablas de verdad.

- a)  $(p \Rightarrow q) \equiv \{(p \wedge \sim q) \Rightarrow q\}$
- b)  $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$
- c)  $\{p \Rightarrow (q \wedge r)\} \equiv \{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\}$
- d)  $\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \equiv \{(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q\}$
- e)  $\{p \Rightarrow (p \wedge \sim (q \vee r))\} \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$
- f)  $[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)] \equiv (q \vee \sim p)$

20. Indique en cuáles de los siguientes casos  $p$  es condición suficiente para  $q$ ; y en cuáles  $p$  es condición necesaria y suficiente para  $q$ .

- a)  $p$ :  $A$  es múltiplo de 4  
 $q$ :  $A$  es número par

- b)  $p$ :  $A$  y  $B$  son pares,  
 $q$ :  $A + B$  es par.

*Respuestas.*

- a)  $p$  es condición suficiente para  $q$  pero  $p$  no es condición necesaria para  $q$ .  
 b) Mismas conclusiones para i).

21. Si las proposiciones compuestas

- i)  $p \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$  y  
 ii)  $\sim p \vee q$

son siempre verdaderas. Demuestre que la proposición  $[\sim r \wedge (p \vee s)] \Rightarrow s \vee q$  es también verdadera.

22. Negar las siguientes afirmaciones:

- a)  $\forall x \exists y (x + y = 5 \Rightarrow y = -x)$   
 b)  $\forall x \forall y [(x + y \text{ es impar}) \Rightarrow (x \text{ es impar} \vee y \text{ es impar})]$   
 c)  $\exists x \forall y (x < y \wedge x^2 \geq y)$   
 d)  $\forall x \forall y \exists z (x < y \Rightarrow x + z = y)$

23. Averiguar el valor de verdad siendo  $U = \mathbb{R}$ .

- a)  $\forall x \in \mathbb{R} (x < 0 \Rightarrow x < 3)$   
 b)  $\exists x \in \mathbb{R} (x^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 = x^3)$   
 c)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} (x^2 + y^2 = 1)$   
 d)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} (y < x \Rightarrow 2y < 10)$

*Respuestas.* a) V b) V c) F d) F

24. Dada la proposición, 8 *no es impar divisible por 2, porque 9 no es múltiplo de 3*. Determinar el valor de verdad de la proposición y negarla.

*Respuesta.* Siendo  $p$  : 8 es impar,  $q$  : 8 es divisible por 2 y  $r$  : 9 es múltiplo de 3, así:  $\sim r \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ .

25. Dadas las proposiciones abiertas  $p(x) : x^2 \geq x$  y  $q(x) : x \geq 0$ . Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i)  $[p(\frac{1}{2}) \Rightarrow q(1)] \Rightarrow [p(x) \wedge q(x)]$

ii)  $\forall x \in \mathbb{R} : \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$

26. Si la proposición  $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim t)$  es falsa, determine el valor de verdad de la proposición  $(p \wedge t) \Rightarrow (r \vee q) \Rightarrow (u \Leftrightarrow v)$ .

*Respuesta.V*

27. Demostrar:

a) Si  $n$  es par y  $m$  es impar, entonces  $(n + m)$  es impar,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

b) Si  $xy = 0$  entonces  $x = 0 \vee y = 0$ .

c) Si  $ab$  es impar, entonces  $a$  es impar y  $b$  es impar.

28. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a)  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$

b)  $\exists x \in \mathbb{R} : 2x = x$

c)  $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{4x-2} = \frac{1}{2}$

d)  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \leq 0$

e)  $\forall x \in \mathbb{R} : -x^2 + 4x - 5 > 0$

29. Se define  $p * q \equiv [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$ .

Mediante el álgebra de proposiciones demuestre que el conectivo “ $\wedge$ ” es distributivo con respecto a “ $*$ ” pasa por la derecha.